LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

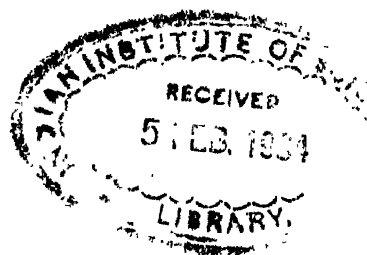
PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS.

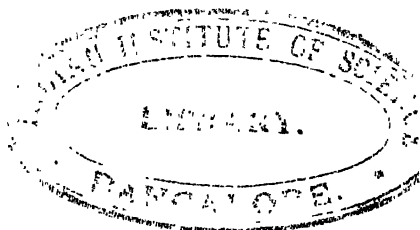
TOME II. — Ire PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE XIV.

LE PROBLÈME DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

211. On se rappelle quel est le principe de la méthode de la variation des constantes que nous avons exposée au Chapitre IV, Tome I. On adopte comme variables indépendantes l'un des systèmes que nous avons appelés *systèmes de variables képlériennes*, par exemple le système des variables L, λ, ξ, η (*Cf.* n^{os} 56, 57, 78, 79).

On arrive ainsi aux équations (4 *bis*) du n° 93

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\lambda}, \qquad \dfrac{d\eta}{dt} = \mu\dfrac{dF_1}{d\xi}, \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\eta}, \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{dF_0}{dL} + \mu\dfrac{dF_1}{dL}. \end{cases}$$

Les fonctions F_0 et F_1 ont été définies aux n^{os} 36 et suivants; la première est très simple, la seconde est ce qu'on appelle la *fonction perturbatrice*.

Nous avons vu aux n^{os} 83 et 99 que cette fonction peut se développer sous la forme

$$(2)\qquad \mu F_1 = \sum A\cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\mathfrak{M},$$

où k_1 et k_2 sont des entiers, où A et h dépendent seulement des L et où $\mathfrak{M}$ est un monome entier par rapport aux ξ et aux η.

D'après la méthode de Lagrange, il faut alors :

1° En première approximation, regarder toutes les variables képlériennes comme des constantes, sauf les λ qui seront des fonctions linéaires du temps; on aura ainsi

$$(3) \qquad L_i = L_i^0, \qquad \xi_i = \xi_i^0, \qquad \eta_i = \eta_i^0, \qquad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0.$$

On aura d'ailleurs

$$F_0 = -\frac{M_1}{2L_1^2} - \frac{M_2}{2L_2^2}, \qquad n_i(L_i^0)^3 = M_i$$

(*Cf.* n^os 82 et 97).

2° En seconde approximation, remplacer les variables par leurs valeurs (3) dans toutes les dérivées partielles de F_1, de sorte que les termes des équations (1) où figurent ces dérivées deviennent des fonctions connues du temps. Les équations (1) s'intègrent alors facilement par quadratures.

3° En troisième approximation, remplacer dans les dérivées de F_1 les variables par leurs valeurs de seconde approximation et intégrer de nouveau les équations (1) par quadratures, et ainsi de suite.

Généralement la seconde approximation suffit. Si l'on remplace la fonction F_1 par son développement (2) et qu'on procède à cette seconde approximation, on trouve tout de suite

$$L_i = L_i^0 + \sum \frac{k_i}{\nu} A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\mathfrak{M},$$

$$\eta_i = \eta_i^0 + \sum \frac{A}{\nu} \quad \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\frac{d\mathfrak{M}}{d\eta_i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

de sorte que le problème des perturbations planétaires (au moins jusqu'à la seconde approximation inclusivement) serait entièrement résolu, si l'on connaissait le développement (2).

Or nous avons bien montré que le développement (2) est possible, mais nous n'avons pas fait voir comment on pouvait effectivement l'obtenir. Ce dernier problème, dont on comprend aisément

l'importance, va maintenant nous occuper, et je veux seulement, dans ce Chapitre, montrer sous quelles formes diverses il se présente.

212. Nous avons vu au Chapitre II que la fonction perturbatrice pouvait être mise sous trois formes différentes qui sont celle des nos 26 et 43, celle des nos 30 et 38, celle du no 44.

Dans ces trois cas, nous avons décomposé la fonction perturbatrice en deux parties, la *partie principale* et la *partie complémentaire*.

Au no 38, nous avons écrit la partie principale sous la forme

$$(4)\quad m_1 m_4 \left[\frac{1}{\sqrt{x_4'^2+x_5'^2+x_6'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_4'-x_1')^2+(x_5'-x_2')^2+(x_6'-x_3)^2}}\right];$$

au no 43, de même qu'au no 44, sous la forme

$$(5)\quad -m_1 m_4 \frac{1}{\sqrt{(x_4'-x_1')^2+(x_5'-x_2')^2+(x_6'-x_3')^2}}.$$

Il est aisé de passer d'une de ces expressions à l'autre; elles ne diffèrent en effet que du premier terme de la parenthèse (4).

Or ce terme ne dépend que des coordonnées x_4', x_5', x_6' de l'une des deux planètes fictives; le développement peut en être obtenu aisément ainsi que nous le verrons dès le Chapitre prochain.

Passons à la partie complémentaire de la fonction perturbatrice; si nous adoptons les variables du no 30, nous avons trouvé au no 38 l'expression de cette partie complémentaire et nous avons exposé ensuite, dans le même no 38, comment on pouvait passer du développement de la partie principale à celui de la fonction perturbatrice complète, et, par conséquent, à celui de la partie complémentaire. Nous reviendrons sur ce point.

Si nous adoptons au contraire les variables du no 26, la partie complémentaire a une expression plus simple et elle s'écrit comme nous l'avons vu au no 43 :

$$(6)\quad T_3 = \frac{1}{m_7}(y_1'y_4'+y_2'y_5'+y_3'y_6').$$

Si enfin on adopte les variables usuelles, c'est-à-dire celles du no 44, la partie complémentaire n'est plus la même pour les deux

planètes. Pour l'une, elle s'écrit

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6), \tag{7}$$

et, pour l'autre,

$$\frac{m_1 m_4}{AC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6). \tag{7 bis}$$

Nous verrons plus loin que le développement des expressions (6), (7), (7 *bis*) est très aisé.

Le problème se trouvera donc ramené au développement de l'expression (5) et c'est cette question qui nous retiendra le plus longtemps. Nous aurons ensuite à voir comment on peut passer du développement de (5) à celui de la partie complémentaire sous ses diverses formes et quelles relations il y a entre les développements des diverses expressions (5), (6), (7), (7 *bis*).

213. Nous avons défini au n° 59 quatre systèmes de variables képlériennes ; ce sont :

1° Le système des éléments *elliptiques*

$$a, \quad e, \quad i, \quad l, \quad g+\theta, \quad \theta;$$

2° Le premier système d'éléments canoniques

$$L, \quad G, \quad \Theta, \quad l, \quad g, \quad \theta;$$

3° Le deuxième système d'éléments canoniques

$$L, \quad \rho_i, \quad \lambda, \quad \omega_i;$$

4° Le troisième système d'éléments canoniques

$$L, \quad \xi_i, \quad \lambda, \quad \eta_i.$$

Selon que l'on adoptera l'un ou l'autre de ces systèmes de variables, le développement de la fonction perturbatrice sera évidemment différent. Heureusement il est aisé de passer d'un développement à l'autre.

Si l'on adopte l'un des systèmes d'éléments canoniques comme nous l'avons fait dans tout le Tome I, on a cet avantage que les équations du problème conservent la forme canonique.

Cependant les astronomes emploient plus communément les éléments elliptiques. Les équations, alors, perdent leur forme canonique. Néanmoins, ainsi que nous l'avons exposé au n° 81, les équations se présentent toujours sous la forme suivante :

Les dérivées par rapport à t des éléments elliptiques s'exprimeront linéairement à l'aide des dérivées partielles de F par rapport aux éléments elliptiques, les coefficients étant des fonctions connues des éléments elliptiques.

J'ajouterai que dans ces coefficients, fonctions connues des éléments elliptiques, figureront seulement les éléments

$$a, \quad e, \quad i, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

qui sont des constantes en première approximation, tandis que l'anomalie moyenne l, qui, en première approximation, varie proportionnellement au temps, ne figurera pas.

Les équations ainsi obtenues pourront s'appeler les *équations de Lagrange*.

Dans le cas des variables canoniques et des équations canoniques, nous n'avons dans le second membre *qu'une seule* des dérivées partielles de la fonction F et elle est affectée seulement du coefficient ± 1 ou -1. Au contraire, dans le cas des variables elliptiques et des équations de Lagrange, nous avons, dans le second membre, plusieurs dérivées partielles de F et elles sont affectées d'un coefficient qui dépend lui-même des éléments elliptiques. Nous ne transcrirons pas ici les équations de Lagrange; nous nous bornerons, comme au n° 81, à renvoyer à l'Ouvrage de Tisserand (t. I, p. 187).

Tout ce que nous avons établi dans le Tome I, en nous servant des équations canoniques, aurait pu évidemment être démontré en partant des équations de Lagrange, mais les démonstrations auraient été fort allongées par la longueur des écritures, sans que rien y soit changé d'essentiel. De même, dans la pratique du calcul, l'emploi des équations canoniques épargnerait bien des longueurs, mais la différence ne commencerait à devenir très sensible qu'à la troisième approximation, tandis qu'on s'arrête d'ordinaire à la seconde.

Quoi qu'il en soit, il arrive que les éléments elliptiques étant

plus familiers aux astronomes et plus anciennement employés, la plupart des travaux relatifs au développement de la fonction perturbatrice ont été exécutés avec ces éléments. Il n'aurait peut-être pas été plus difficile de les faire directement en se servant des éléments canoniques, si on les avait adoptés tout d'abord. Mais aujourd'hui ce serait refaire un travail qui a déjà été fait une fois et il vaut mieux utiliser les résultats obtenus par nos devanciers.

Heureusement, comme je l'ai dit, il est aisé de passer du développement procédant suivant les éléments elliptiques à celui qui procède suivant l'un ou l'autre des systèmes d'éléments canoniques.

Nous ferons peu d'usage du premier système d'éléments canoniques; en effet, si les excentricités et les inclinaisons sont très petites, il arrive que quelques-unes des variables du deuxième et du troisième systèmes canoniques sont également très petites. La même chose n'arrive pas avec le premier système, qui est ainsi peu applicable à des méthodes d'approximation où la petitesse des excentricités et des inclinaisons joue un rôle capital.

C'est ce qui nous engage à le rejeter.

En revanche, nous serons obligés de considérer un autre système de variables elliptiques

$$a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

où l'anomalie moyenne l est remplacée par l'anomalie excentrique u.

L'emploi de ces variables se prête mal à l'intégration, bien que Hansen en ait fait quelque usage. En revanche, le développement procédant suivant ces nouvelles variables est beaucoup plus facile que celui qui procède suivant les variables elliptiques ordinaires. Il est aisé de passer de l'un à l'autre et c'est par l'intermédiaire du premier développement qu'il est le plus commode de parvenir au second. C'est ce qui justifie l'étude détaillée que nous ferons de ce premier développement.

Nous aurons donc à étudier quatre développements de la fonction perturbatrice procédant :

1° Suivant les variables

$$a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g+\theta, \quad \theta; \tag{8}$$

2° Suivant les variables elliptiques

$$a, \quad e, \quad i, \quad l, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

ou, si l'on aime mieux, puisque

$$\lambda = l + g + \theta,$$

suivant les variables elliptiques

$$a, \quad e, \quad i, \quad \lambda, \quad g+\theta, \quad \theta; \tag{9}$$

3° Suivant les variables canoniques

$$\text{L}, \quad \rho_i, \quad \lambda, \quad \omega_i; \tag{10}$$

4° Suivant les variables canoniques

$$\text{L}, \quad \xi_i, \quad \lambda, \quad \eta_i, \tag{11}$$

et nous aurons principalement à rechercher comment on peut passer d'un de ces développements à un autre.

214. La fonction perturbatrice va donc se développer sous la forme

$$\sum \text{B} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) + \sum \text{C} \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2), \tag{12}$$

si l'on adopte l'un des systèmes (9), (10) et (11), k_1 et k_2 étant des entiers, λ_1 et λ_2 les longitudes moyennes. Quant aux coefficients B et C, ce sont des fonctions des autres variables, c'est-à-dire des éléments osculateurs a, e, i, $g+\theta$, θ des deux planètes, ou bien des L, des ρ et des ω, ou bien encore des L, des ξ et des η.

Si l'on adoptait les variables (9), le développement se présenterait sous la forme

$$\sum \text{B}' \cos(k_1 u_1 + k_2 u_2) + \sum \text{C}' \sin(k_1 u_1 + k_2 u_2), \tag{13}$$

où u_1 et u_2 sont les anomalies moyennes et où B′ et C′ sont des fonctions des éléments

$$a, \quad e, \quad i, \quad g+\theta, \quad \theta.$$

Le problème consiste à déterminer ces fonctions B, C, B′, C′; mais on peut l'envisager de bien des manières :

1° On peut chercher à développer ces fonctions suivant les puissances des e et des i, si l'on prend les variables (9); suivant celles des ρ si l'on prend les variables (10); suivant celles des ξ et des η si l'on prend les variables (11) et envisager séparément les différents termes du développement.

On a alors l'avantage d'obtenir des formules analytiques valables une fois pour toutes et que l'on peut appliquer ensuite à un cas particulier quelconque, pourvu que les excentricités et les inclinaisons soient assez petites.

La question qui se pose est alors celle des conditions de convergence de ces développements et c'est une de celles que nous aurons à examiner.

2° On peut se proposer seulement de déterminer, pour deux planètes particulières, les valeurs numériques de ces fonctions et de quelques-unes de leurs dérivées.

Le nombre des termes à calculer se trouve ainsi considérablement diminué, de sorte que le travail est notablement allégé, surtout si l'on ne doit pas pousser trop loin l'approximation.

A ce point de vue, la question la plus importante sera de déterminer une limite supérieure de chaque coefficient, afin de laisser de côté les termes dont le coefficient serait certainement trop petit.

3° On peut enfin étudier les propriétés analytiques de ces fonctions, en vue précisément de faciliter le calcul numérique dont il vient d'être question.

Nous verrons que ces fonctions satisfont à des équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des L, ξ et η, ou encore des

$$a, \quad e, \quad \operatorname{tang}\frac{i}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{g}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

Nous verrons également qu'il y a entre ces fonctions de remarquables relations de récurrence.

215. J'ai dit que ce qui nous arrêterait le plus longtemps, c'est

le développement de la partie de la fonction perturbatrice qui est de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{D}},$$

où

$$D = (x'_1 - x'_4)^2 + (x'_2 - x'_5)^2 + (x'_3 - x'_6)^2.$$

Mais nous serons amenés à développer non seulement $\frac{1}{\sqrt{D}}$, mais encore

$$\frac{1}{\sqrt{D^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{D^5}}, \quad \ldots.$$

Voici pourquoi; je suppose que les coordonnées des planètes et, par conséquent, D, dépendent d'une quantité très petite α (par exemple l'excentricité), et que nous voulions développer suivant les puissances de cette quantité α.

Soit D_0 ce que devient D pour $\alpha = 0$, et posons

$$D = D_0 + \varepsilon.$$

Nous allons d'abord chercher à développer suivant les puissances de ε et il sera aisé ensuite de passer au développement suivant les puissances de α; on trouve ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{D_0^3}} + \frac{3\varepsilon^2}{8}\frac{1}{\sqrt{D_0^5}} - \ldots.$$

On voit que dans le second membre figurent non seulement $\frac{1}{\sqrt{D_0}}$, mais $\frac{1}{\sqrt{D_0^3}}, \frac{1}{\sqrt{D_0^5}}, \ldots.$

Ce n'est pas tout. Dans les équations canoniques (4 *bis*) et (5 *bis*) du n° 93, par exemple, figurent, non pas la fonction perturbatrice elle-même, mais les dérivées partielles de cette fonction. Or, si la fonction perturbatrice contient un terme en $\frac{1}{\sqrt{D}}$, la différentiation introduira dans ses dérivées un terme en $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$.

Supposons maintenant qu'on veuille pousser au delà de la deuxième approximation; les seconds membres de nos équations prendront, comme nous l'avons vu au n° 100 (t. I, p. 122), la forme

$$\sum B\mathfrak{M}'.$$

où les B seront des dérivées partielles de la fonction perturbatrice, qui cette fois ne seront plus du premier ordre, mais d'ordre quelconque, ce qui amènera, non plus seulement un terme $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$, mais des termes en $\frac{1}{\sqrt{D^5}}$, ...

Voilà donc deux raisons différentes qui nous obligent à étudier le développement de $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{D^5}}$, en même temps que celui de $\frac{1}{\sqrt{D}}$.

216. Reprenons les formules (12) et considérons le développement de B ou de C suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. Soit m le degré de l'un quelconque des termes de ce développement.

Nous avons vu au Tome I que m est au moins égal à $|k_1 - k_2|$ et de même parité que $|k_1 - k_2|$.

Or, si les excentricités et les inclinaisons sont petites, un terme est d'autant plus petit que son degré est plus élevé. On aura donc une bonne approximation de B ou de C en se bornant aux termes dont le degré est précisément $|k_1 - k_2|$. L'ensemble des termes constituera ce que nous pourrons appeler la *partie principale* du coefficient B ou C. Il sera intéressant de chercher ce que devient la fonction perturbatrice quand on réduit chacun des coefficients de la formule (12) à sa partie principale.

Ce que nous venons de dire s'applique encore si, au lieu de développer suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons, on développe suivant celles des ξ et des η.

217. Il arrive quelquefois qu'on est obligé, dans la fonction perturbatrice, de calculer un terme de degré élevé, sans avoir à calculer les termes de degré inférieur. En général, les coefficients des divers termes vont en décroissant très rapidement à mesure que le degré s'élève; mais il peut arriver qu'un terme dont le coefficient est très petit ait néanmoins une grande importance, parce que l'intégration introduit des petits diviseurs grâce auxquels un petit terme produit parfois une perturbation considérable.

Supposons que nous ayons, dans la fonction perturbatrice, un terme

[illegible]

et que les entiers k_1 et k_2 soient très grands, mais de telle façon que le rapport $-\frac{k_1}{k_2}$ soit voisin du rapport des moyens mouvements $\frac{n_2}{n_1}$. Alors la différence $|k_1 - k_2|$ et, par conséquent, le degré du terme, seront très élevés; le coefficient B sera, par conséquent, très petit, mais, en revanche, le petit diviseur $k_1 n_1 + k_2 n_2$ sera également très petit, de sorte que, finalement, la perturbation pourra être très notable.

Le calcul exact du coefficient B serait alors très long, parce qu'il exigerait le calcul préalable des termes précédents qui ne sont pas directement utiles. On peut l'éviter, en se servant des formules approchées applicables seulement aux termes de degré élevé et fondées sur les propriétés des fonctions de très grands nombres, soit que ces formules donnent d'emblée une approximation suffisante, soit qu'elles permettent seulement de reconnaître si le terme en question est sensible, et si, par conséquent, on doit prendre la peine de le calculer exactement.

218. Nous aurons à examiner spécialement différents cas particuliers, dont les principaux sont :

1° Celui où les excentricités et les inclinaisons sont nulles;

2° Celui où les excentricités seulement sont nulles; dans ces deux cas, la distinction entre l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique et, par conséquent, entre les deux développements (12) et (13), n'a plus de raison d'être;

3° Celui où les inclinaisons sont nulles.

Un autre cas particulier qui méritera notre attention est celui de la Lune; le rapport des grands axes étant alors très petit, on a avantage à développer suivant les puissances de ce rapport, et il en résulte une forme particulière du développement.

J'ajoute que les théories de la Lune étant très nombreuses, les formes de développement qui ont été proposées dans le cas de cet astre le sont également, et nous aurons sans doute l'occasion d'en dire quelques mots.

219. Nous avons déjà eu l'occasion, outre le développement (12)

qui procède suivant les anomalies moyennes, d'envisager le développement (13) qui procède suivant les anomalies excentriques.

Ce dernier développement a été employé par Hansen, qui s'est aussi servi de développements procédant suivant l'anomalie excentrique de l'une des planètes et l'anomalie moyenne de l'autre.

D'autre part, Gyldèn a employé des développements procédant suivant les anomalies vraies.

Quand on prend, comme l'ont fait ces astronomes, pour variable indépendante l'anomalie, soit vraie, soit excentrique, de l'une des planètes, on est obligé à certaines transformations souvent assez longues et compliquées.

En effet, il y a entre les anomalies vraie et excentrique d'une planète et l'anomalie moyenne de cette même planète des relations assez simples et bien connues. D'autre part, les anomalies moyennes des deux planètes sont liées par une relation linéaire.

Au contraire, la relation qui lie les deux anomalies excentriques (ou bien encore celle qui lie les deux anomalies vraies) est comparativement compliquée.

Si donc on a développé la fonction perturbatrice suivant les deux anomalies excentriques (ou vraies) et qu'on veuille ensuite tout exprimer à l'aide de la variable indépendante qui sera l'anomalie excentrique (ou vraie) de l'une des deux planètes, il faut remplacer, dans le développement, la seconde anomalie excentrique (ou vraie) par son expression en fonction de la première, et cela donne lieu à des difficultés de calcul dont nous dirons quelques mots.

220. Dans les équations canoniques, ce n'est pas la fonction perturbatrice qui figure directement, mais ses dérivées partielles du premier ordre. C'est donc le développement de ces dérivées qui serait surtout intéressant.

Quand le développement de la fonction perturbatrice est donné sous la forme analytique, et surtout sous la forme d'une série procédant suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons, ou suivant celles des ξ et des η, on passe immédiatement d'un développement à l'autre.

Mais il n'en est pas de même quand on s'est borné à déterminer

la valeur numérique des coefficients, comme nous l'avons expliqué au nº 214; il faut alors recommencer le travail pour chacune des dérivées.

C'est ce qui a amené certains astronomes à préférer aux équations canoniques ou même à celles de Lagrange une autre forme d'équations. Ils ont remarqué en effet que ces dérivées partielles sont au nombre de *six;* on peut au contraire former des équations dans les seconds membres desquelles figurent, non les *six* dérivées partielles de la fonction perturbatrice, mais les *trois* composantes de la force perturbatrice, soit suivant les trois axes de coordonnées, soit suivant le rayon vecteur et deux perpendiculaires à ce rayon, l'une dans le plan de l'orbite, l'autre perpendiculaire à ce plan. On n'a plus alors à faire que trois développements au lieu de six.

C'est qu'en effet les six dérivées partielles ne sont pas indépendantes; il y a, entre elles et la fonction perturbatrice elles-même, certaines relations, il y en a encore entre ces dérivées et les trois composantes de la force, prises de l'une des deux manières que je viens de dire.

On peut donc se proposer de former ces relations et de montrer comment on peut s'en servir pour déduire tous les développements de l'un d'entre eux, par exemple de celui de la fonction perturbatrice.

Cette revue rapide montre sous combien de faces différentes peut se présenter le problème du développement de la fonction perturbatrice qui va faire l'objet des Chapitres suivants.

CHAPITRE XV.

APPLICATION DES FONCTIONS DE BESSEL.

221. La première chose à faire est d'exprimer les coordonnées rectangulaires ou polaires des planètes en fonctions de l'un quelconque des systèmes d'éléments osculateurs canoniques ou elliptiques, définis aux n^{os} 59 et 213.

Nous avons vu, au n° 65 et aux numéros suivants, que les coordonnées sont développables suivant les puissances des ξ et des η et nous avons étudié quelques-unes des propriétés de ces développements. Mais il y a lieu de pousser cette étude plus loin et nous commencerons par former les développements des coordonnées en fonctions des éléments elliptiques

$$a, \quad e, \quad i, \quad \lambda, \quad g+\theta, \quad \theta, \tag{1}$$

Nous supposerons même d'abord que l'on a pris pour plan des $x_1 x_2$ le plan de l'orbite, pour axe des x_1 le grand axe; de telle façon que l'inclinaison i soit nulle, de même que la longitude du périhélie $g+\theta$, et que la longitude moyenne λ soit égale à l'anomalie moyenne l. Dans ces conditions nos coordonnées ne dépendent plus de la longitude du nœud θ, de sorte que nous n'avons plus qu'à exprimer ces coordonnées en fonctions de

$$a, \qquad e, \qquad l=\lambda.$$

Dans ces conditions on a en introduisant l'anomalie excentrique u :

$$\begin{gathered} x_1 = a(\cos u - e), \qquad x_2 = a\sin u\sqrt{1-e^2}, \qquad x_3 = 0, \\ l = u - e\sin u. \end{gathered} \tag{2}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer x_1 et x_2 en fonctions de l, mais

pour cela nous avons besoin de rappeler d'abord les propriétés des fonctions de Bessel dont nous allons être amenés à faire usage.

222. Considérons l'expression

$$F = E^{ix \sin u},$$

où j'ai représenté par E la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$, afin d'éviter toute confusion avec e qui représente l'excentricité.

Cette fonction F est une fonction périodique de u, développable d'après la méthode de Fourier en série procédant suivant les exponentielles

$$E^{imu},$$

où m est un entier positif ou négatif. Les coefficients sont des fonctions de x, de sorte que je puis écrire

$$E^{ix \sin u} = \sum J_m(x) E^{imu}. \tag{3}$$

Les fonctions $J_m(x)$ s'appellent les *fonctions de Bessel*. Le premier membre de (3) est le produit des deux exponentielles

$$E^{\frac{x}{2}E^{iu}} = \sum \left(\frac{x}{2} E^{iu}\right)^\alpha \frac{1}{\alpha!},$$

$$E^{-\frac{x}{2}E^{-iu}} = \sum \left(-\frac{x}{2} E^{-iu}\right)^\beta \frac{1}{\beta!},$$

d'où, par multiplication,

$$F = \sum \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^\beta}{\alpha!\,\beta!} E^{iu(\alpha-\beta)}.$$

Pour avoir J_m, il faut chercher dans le second membre les termes en E^{imu}, c'est-à-dire faire $\alpha = \beta + m$. Nous trouvons ainsi

$$J_m(x) = \sum \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,\overline{\beta+m}!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\beta}. \tag{4}$$

Si m est positif ou nul, il faut donner à β les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots,$$

et appliquer la formule en supposant

$$0! = 1! = 1.$$

On voit alors que $J_m(x)$ est une fonction entière de x, divisible par x^m; la série (4) converge en effet très rapidement pour toutes les valeurs de x.

Si m est négatif, il faut donner à β les valeurs

$$-m, \quad -m+1, \quad -m+2, \quad \ldots,$$

de façon que α soit positif ou nul. Alors $J_m(x)$ est encore une fonction entière de x divisible cette fois par x^{-m}.

Observons d'ailleurs que le développement (4) ne contient que des termes de degré pair si m est pair, de degré impair si m est impair. On a donc

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x). \tag{5}$$

Si d'autre part, dans la formule (3), nous changeons x en $-x$ et u en $-u$, elle devient

$$E^{ix\sin u} = \sum J_m(-x) E^{-imu}. \tag{3 bis}$$

En identifiant les deux développements (3) et (3 *bis*) de $E^{ix\sin u}$, on trouve

$$J_{-m}(x) = J_m(-x),$$

d'où

$$J_{-m} = (-1)^m J_m, \tag{6}$$

formule qui permet de ne considérer que des fonctions de Bessel d'indice positif.

223. Différentions l'équation (3) par rapport à u, il vient

$$ix \cos u E^{ix\sin u} = \sum im J_m E^{imu}$$

ou

$$\frac{x}{2}(E^{iu} + E^{-iu}) \sum J_m E^{imu} = \sum m J_m E^{imu}.$$

En identifiant les coefficients de E^{imu} dans les deux membres il vient

$$x(J_{m-1} + J_{m+1}) = 2m J_m, \tag{7}$$

relation de récurrence entre trois fonctions de Bessel consécutives.

Différentions maintenant l'équation (3) par rapport à x, il viendra

$$(8) \qquad i \sin u \, E^{ix \sin u} = \sum J'_m(x) E^{imu}$$

ou

$$(E^{iu} - E^{-iu}) \sum J_m E^{imu} = 2 \sum J'_m E^{imu},$$

ou en identifiant les deux membres

$$(9) \qquad 2 J'_m = J_{m-1} - J_{m+1},$$

formule qui permet de calculer la dérivée de J_m.

224. Différentions maintenant la formule (3) deux fois par rapport à u, ou bien encore deux fois par rapport à x, nous obtiendrons ainsi les deux formules

$$(10) \qquad -ix \sin u \, E^{ix \sin u} - x^2 \cos^2 u \, E^{ix \sin u} = -\sum m^2 J_m E^{imu},$$

$$(11) \qquad -\sin^2 u \, E^{ix \sin u} = \sum J''_m(x) E^{imu}.$$

Ajoutons maintenant les quatre formules (3), (8), (10), (11) après les avoir respectivement multipliées par

$$x^2, \quad +x, \quad 1, \quad x^2;$$

il viendra

$$\sum [x^2 J''_m + x J'_m + (x^2 - m^2) J_m] E^{imu} = 0;$$

d'où

$$(12) \qquad x^2 J''_m + x J'_m + (x^2 - m^2) J_m = 0,$$

équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction de Bessel J_m.

225. Bien que la série (4) converge très rapidement pour toutes les valeurs de x, il peut y avoir intérêt à rechercher une valeur approchée de la fonction J_m pour x très grand. Nous avons par la formule de Fourier

$$2\pi J_m = \int_0^{2\pi} E^{ix \sin u} E^{-imu} du,$$

ou en posant

$$\sin u = z,$$

$$(13) \qquad \pi J_m = \int_{-1}^{+1} E^{ixz} E^{-imu} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Supposons x réel, positif et très grand. Au lieu de faire l'intégration le long de la droite qui joint le point $z = -1$ au point $z = 1$, c'est-à-dire en donnant à z des valeurs réelles, nous pouvons la faire le long d'un autre chemin ayant mêmes extrémités.

Nous choisirons un chemin tel que la partie imaginaire de z soit constamment positive, sauf bien entendu aux deux extrémités $z = \pm 1$. Dans ces conditions ixz a sa partie réelle négative et très grande, et E^{ixz} est très petit. Les seules parties du chemin d'intégration qui pourront donner des termes sensibles sont donc les parties voisines des deux extrémités, parce qu'aux extrémités, z devient réel et que la partie réelle de ixz devient nulle.

Mais près de l'extrémité $z = 1$; nous avons sensiblement

$$u = \frac{\pi}{2}, \qquad E^{-imu} = E^{-im\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{2(1 - z)}.$$

Près de l'extrémité $z = -1$; nous avons sensiblement

$$u = -\frac{\pi}{2}, \qquad E^{-imu} = E^{im\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{2(1 + z)}.$$

Mais il importe de voir quel signe il convient de donner aux radicaux. Nous devons supposer que le signe de $\sqrt{1 - z^2}$ a été choisi de façon que, pour z réel et compris entre -1 et $+1$, le radical soit réel et positif. Nous pouvons supposer d'autre part que le chemin d'intégration aboutit à ses deux extrémités ± 1 par deux petits segments de droite de longueur ε, perpendiculaires à l'axe des quantités réelles. Ce sera d'ailleurs les seules parties de ce chemin que nous conserverons.

L'argument de $\sqrt{1 - z^2}$ sera alors $\frac{\pi}{4}$ le long du segment aboutis-
[sant] à $z = -1$, et $-\frac{\pi}{4}$ le long du segment aboutissant à $z = 1$.
[Sur le] premier segment nous pourrons prendre $\arg \sqrt{z + 1} = \frac{\pi}{4}$,

et le long du second $\arg\sqrt{z-1} = \frac{\pi}{4}$; nous aurons donc

$$\sqrt{1-z^2} = -i\sqrt{2}\sqrt{z-1}; \qquad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+z},$$

d'où

$$(14) \quad \pi J_m = \int_{-1}^{-1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{1+z}} - i\int_{1}^{1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z-1}}.$$

Mais nous pouvons remplacer les limites supérieures $\pm 1 + \varepsilon i$ des deux intégrales par l'infini; car nous ajoutons ainsi aux chemins d'intégration des lignes le long desquelles la partie imaginaire de z est positive et notable de sorte que E^{ixz} est négligeable.

Or

$$\int_0^\infty \frac{E^{ixz}\,dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{i}{x}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,E^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Donc

$$\int_h^\infty \frac{E^{ixz}\,dz}{\sqrt{z-h}} = E^{ixh}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,E^{\frac{i\pi}{4}},$$

d'où

$$\pi J_m = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[E^{i\left(-x+\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + E^{i\left(x-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right],$$

ou enfin

$$(15) \qquad J_m = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

226. Voyons maintenant comment les transcendantes de Bessel peuvent être employées au développement des coordonnées du mouvement elliptique. Considérons l'exponentielle

$$E^{piu},$$

où p est un entier; c'est une fonction périodique de u et par conséquent aussi une fonction périodique de l. Elle est donc développable en série de Fourier sous la forme

$$\sum A_m E^{mil};$$

il s'agit de calculer le coefficient A_m; la formule de Fourier nous donne

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} E^{piu} E^{-mil}\,dl.$$

Or

$$E^{-mil}\,dl = \frac{i}{m}\,dE^{-mil}; \qquad dE^{piu} = ip\,E^{piu}\,du.$$

On trouve donc en intégrant par parties

$$2\pi A_m = \frac{p}{m}\int_0^{2\pi} E^{piu}E^{-iml}\,du,$$

ou à cause de l'équation de Képler

$$2\pi A_m = \frac{p}{m}\int E^{(p-m)iu}E^{ime\sin u}\,du.$$

Mais l'intégrale c'est évidemment au facteur 2π près le coefficient de $E^{(m-p)iu}$ dans le développement de $E^{ime\sin u}$; elle est donc égale à

$$2\pi J_{m-p}(me),$$

d'où la formule cherchée

$$A_m = \frac{p}{m}J_{m-p}(me). \tag{16}$$

227. Cette démonstration ne s'applique plus pour $m = 0$ et d'ailleurs la formule devient illusoire. On a alors

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} E^{piu}\,dl$$

ou

$$2\pi A_0 = \int E^{piu}(1 - e\cos u)\,du$$

ou

$$2\pi A_0 = \int\left(E^{piu} - \frac{e}{2}E^{(p+1)iu} - \frac{e}{2}E^{(p-1)iu}\right)du,$$

ce qui montre que A_0 est égal à 1 pour $p = 0$, à $-\frac{e}{2}$ pour $p = \pm 1$, et à 0 pour toutes les autres valeurs de p.

228. Proposons-nous maintenant de développer suivant les exponentielles E^{iml} une fonction périodique quelconque de u

$$F(u) = \sum B_p E^{ipu},$$

et de la mettre ainsi sous la forme

$$F(u) = \sum A_m E^{iml}.$$

Les principes des deux numéros précédents nous donneront

$$A_m = \sum \frac{p}{m} B_p J_{m-p}(me), \tag{17}$$

pour $m \lesseqgtr 0$ et

$$A_0 = B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1}), \tag{18}$$

pour $m = 0$.

Inutile d'ajouter qu'en partant de l'identité

$$E^{ipu} E^{iqu} = E^{i(p+q)u},$$

en y remplaçant les trois exponentielles par leurs développements et en identifiant les deux développements, on arrive à un grand nombre de relations où le premier membre est une fonction de Bessel et le second membre une série dont tous les termes sont des produits de fonctions de Bessel.

229. Grâce aux formules (17) et (18) du numéro précédent, le développement d'une fonction quelconque de u suivant les puissances de E^{il} se déduit aisément du développement suivant les puissances de E^{iu}; or la plupart des fonctions intéressantes relatives au mouvement elliptique s'expriment très simplement à l'aide de E^{iu}.

Supposons d'abord que nous prenions pour plan des $x_1 x_2$ le plan de l'orbite et pour axe des x_1 le grand axe, nous aurons

$$x_1 = a(\cos u - e) = -ae + \frac{a}{2} E^{iu} + \frac{a}{2} E^{-iu},$$

$$x_2 = a\sqrt{1-e^2} \sin u = \frac{a}{2i}\sqrt{1-e^2}(E^{iu} - E^{-iu}),$$

$$x_3 = 0,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a(1 - e\cos u).$$

L'application des formules (17) et (18) nous donne

$$\frac{x_1}{a} = \sum A_m E^{mil}; \qquad \frac{x_2}{a} = \sum A'_m E^{mil},$$

avec

$$(19)\qquad \begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2m} [J_{m-1}(me) - J_{m+1}(me)], \\ A'_m &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2im} [J_{m-1}(me) + J_{m+1}(me)]. \\ A_0 &= -\frac{3e}{2}, \qquad A'_0 = 0. \end{aligned}$$

Les formules de récurrence (7) et (9) nous permettent d'écrire

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} A_m &= \frac{1}{m} J'_m(me), \\ A'_m &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{iem} J_m(me). \end{aligned} \right.$$

Nous trouverions de même

$$r = a + \frac{ae^2}{2} - ae \sum \frac{J'_m(me)}{m} E^{mil}.$$

Sous le signe $\sum$, l'indice m prend toutes les valeurs entières positives et négatives, à l'exception de la valeur 0. Cette formule se déduit immédiatement de la relation

$$r = a(1-e^2) - ex_1.$$

Nous pourrions écrire également

$$\frac{x_1 + ix_2}{a} = -e + \frac{E^{iu}}{2}\left(1 + \sqrt{1-e^2}\right) + \frac{E^{-iu}}{2}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right),$$

$$\frac{x_1 - ix_2}{a} = -e + \frac{E^{-iu}}{2}\left(1 + \sqrt{1-e^2}\right) + \frac{E^{iu}}{2}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right),$$

d'où l'on déduirait par les formules (17) et (18) les développements de $x_1 \pm ix_2$.

230. Reportons-nous maintenant au n° 63 et aux quantités que nous y avons appelées X et Y; nous voyons que l'on aura

$$X + iY = (x_1 + ix_2)E^{-il},$$

et par conséquent, par application des formules (17) et (18),

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} X + iY = &-\frac{3ae}{2} E^{-il} + \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1-e^2}\right) \sum \frac{J_{m-1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l} \\ &- \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \sum \frac{J_{m+1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l}. \end{aligned} \right.$$

On en déduirait le développement de $X - iY$ en changeant i en $-i$, et par conséquent les développements de X et de Y.

Supposons maintenant que nous rapportions notre système à des axes quelconques; les quantités auxiliaires X et Y seront toujours définies comme au n° 63 et leur développement en fonction des variables a, e et l ne changera pas. Quant aux coordonnées rectangulaires rapportées aux nouveaux axes, elles seront liées à X et Y par les équations (12) du n° 63, t. I, p. 79.

Ces formules peuvent aussi s'écrire

$$(22)\quad \begin{cases} x_1 + ix_2 = \cos^2\frac{J}{2}(X + iY)E^{i\lambda} + \sin^2\frac{J}{2}(X - iY)E^{-i(\lambda-2\theta)}, \\ x_3 = \text{partie imag. de } \frac{\sin J}{2}(X + iY)E^{i(\lambda-\theta)}. \end{cases}$$

J'ai remplacé la lettre i des formules du n° 63, qui représentait l'inclinaison, par la lettre J, afin d'éviter toute confusion avec $i = \sqrt{-1}$; on obtiendrait l'expression de $x_1 - ix_2$ en changeant i en $-i$.

En rapprochant les formules (21) et (22) on trouve

$$(23)\quad \begin{cases} x_1 + ix_2 = a\cos^2\frac{J}{2}\Big[-\frac{3e}{2}E^{i(g+\theta)} \\ \qquad\qquad + \sum \frac{E^{i(ml+g+\theta)}}{4m}(\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1})\Big] \\ \qquad + a\sin^2\frac{J}{2}\Big[-\frac{3e}{2}E^{i(\theta-g)} \\ \qquad\qquad + \sum \frac{E^{i(-ml+\theta-g)}}{4m}(\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1})\Big]. \end{cases}$$

J'ai écrit pour abréger ε_1 et ε_2 au lieu de $1 + \sqrt{1 - e^2}$ et de $1 - \sqrt{1 - e^2}$. L'argument des fonctions de Bessel J_{m-1} et J_{m+1} est égal à me.

On trouve de même

$$(23\ bis)\quad x_3 = \frac{a\sin J}{2}\Big[-\frac{3e}{2}\sin g + \sum \frac{\sin(ml + g)}{4m}(\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1})\Big].$$

231. Les développements obtenus par la méthode du n° 228 ne sont pas les seuls que l'on puisse imaginer. Supposons par

exemple que l'on veuille développer

$$\frac{du}{dl} = \frac{1}{1 - e\cos u}.$$

On pourrait évidemment développer $\frac{1}{1 - e\cos u}$ en série de Fourier et appliquer ensuite la méthode du n° 228; mais il y a quelque chose de beaucoup plus simple.

Nous avons

$$u = l + e\sin u,$$

ou, en se reportant au développement de x_2 au n° 229 et à la formule (20),

$$u = l + \frac{1}{8im}\sum J_m(me)E^{iml},$$

ou, en différentiant,

$$\frac{du}{dl} = 1 + \sum J_m(me)E^{iml}. \tag{24}$$

Ce développement nous donne en même temps celui de

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e\cos u)}.$$

Plus généralement, cela nous donne le moyen de développer les expressions de la forme

$$\frac{F(u)}{1 - e\cos u}.$$

Si, en effet, l'on a

$$F(u) = \sum C_p E^{ipu},$$

on aura

$$\frac{F(u)}{1 - e\cos u} = \frac{d}{dl}\sum \frac{C_p}{ip}E^{ipu}.$$

On développera alors $\sum \frac{C_p}{ip}E^{ipu}$ en série procédant suivant les exponentielles E^{iml} et l'on différentiera par rapport à l.

Cette méthode peut être plus avantageuse que celle du n° 228 si le développement de $F(u)$ suivant les exponentielles E^{ipu} est plus simple que celui de $\frac{F(u)}{1 - e\cos u}$, si par exemple il se réduit

à un nombre fini de termes. En particulier nous trouverons les développements de $\frac{\cos u}{r}$, $\frac{\sin u}{r}$, expressions qui sont liées à $\cos v$ et à $\sin v$ par des relations linéaires (v est l'anomalie vraie).

232. Nous pourrions aussi différentier par rapport à e; il vient

$$(1 - e\cos u)\frac{du}{de} = \sin u.$$

Du développement d'une fonction périodique quelconque $\Phi(u)$ nous déduirons donc immédiatement celui de

$$\frac{\sin u \frac{d\Phi}{du}}{1 - e\cos u},$$

ce qui pourra être utile si le développement de $\frac{d\Phi}{du}$ est plus simple que celui de $\sin u \frac{d\Phi}{du}$. En particulier on peut calculer de cette façon

$$\frac{\sin u}{r},$$

qui ne diffère de $\sin v$ que par un facteur constant.

Mais nous pouvons également différentier deux ou plusieurs fois par rapport à l, ou au contraire intégrer par rapport à l.

Par exemple les équations du mouvement képlérien nous donnent

$$\frac{d^2 x_i}{dl^2} = -\frac{a^3 x_i}{r^3}. \tag{25}$$

Or nous connaissons les développements des coordonnées x_i, où le coefficient de chaque terme ne dépend que d'un nombre fini de fonctions de Bessel; l'équation (25) nous donnera donc celui de $\frac{x_i}{r^3}$, chaque terme ne dépendant que d'un nombre fini de fonctions de Bessel. En particulier, si nous prenons les axes du n° **229**, nous connaîtrons les développements de

$$\frac{x_1}{r^3} = \frac{\cos v}{r^2}, \qquad \frac{x_2}{r^3} = \frac{\sin v}{r^2},$$

v étant l'anomalie vraie.

Si nous multiplions chacune des équations (25) par x_i et que nous ajoutions, nous trouverons

$$\frac{d^2 r^2}{dl^2} - \sum \left(\frac{dx_i}{dl} \right)^2 = -\frac{M}{r}. \tag{26}$$

Comme le second terme du premier membre de (26) est une fonction linéaire de $\frac{1}{r}$ en vertu de l'équation des forces vives, l'équation (26) nous apprend qu'il y a une relation linéaire entre $\frac{1}{r}$ et $\frac{d^2 r^2}{dl^2}$.

Or l'équation (24) nous donne le développement de $\frac{1}{r}$; nous possédons donc celui de $\frac{d^2 r^2}{dl^2}$, d'où, par une double intégration, celui de r^2. Nous avons donc les développements de r, $\frac{1}{r}$ et r^2.

L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires nous donne

$$e \cos v = \frac{a(1 - e^2)}{r} - 1,$$
$$e r^2 \cos v = a(1 - e^2) r - r^2.$$

Des développements de $\frac{1}{r}$, r et r^2 nous déduirons donc ceux de $\cos v$ et $r^2 \cos v$. Nous avions d'ailleurs expliqué plus haut la façon de développer $\cos v$.

Tous les développements dont il vient d'être question sont tels que chaque terme ne dépend que d'un nombre fini des fonctions de Bessel. Inutile d'ajouter que, par l'emploi des relations (7), (9) et (12), on peut s'arranger pour que chaque terme ne contienne plus que

$$J_m(me) \quad \text{et} \quad J'_m(me).$$

233. Nous pourrions nous proposer de développer les coordonnées en fonction des éléments canoniques

$$L, \quad \lambda, \quad \rho, \quad \omega, \quad \xi, \quad \eta.$$

Si nous nous reportons aux formules (23) et (23 *bis*) nous verrons qu'il suffit pour cela de développer les exponentielles $E^{m\lambda}$ les expressions

$$a \cos^2 \frac{J}{2}, \quad e^m E^{\pm im(g+\theta)}, \quad \operatorname{tang}^2 \frac{J}{2} E^{\pm 2i\theta}, \quad \operatorname{tang} \frac{J}{2} e^{\pm i\theta}, \tag{27}$$

et enfin la fonction

$$K_m = \frac{\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}}{e^{|m-1|}}.$$

Les exponentielles $E^{mi\lambda}$ sont directement exprimées par les éléments canoniques, les expressions (27) se réduisent respectivement à

$$L^2 \frac{2L - 2\rho_1 - \rho_2}{L - \rho_1}, \quad \frac{(\xi_1 \pm i\eta_1)^m}{L^{\frac{m}{2}}}, \quad \frac{(\xi_2 \pm i\eta_2)^2}{2L - 2\rho_1 - \rho_2}, \quad \frac{\xi_2 \pm i\eta_2}{\sqrt{2L - 2\rho_1 - \rho_2}},$$

en faisant abstraction de facteurs constants.

Quant à K_m il est développable suivant les puissances croissantes de

$$e^2 = 2\frac{\rho_1}{L} - \left(\frac{\rho_1}{L}\right)^2,$$

et le développement se déduit aisément de celui des fonctions de Bessel. Je n'insisterai pas davantage sur ces points, me bornant à renvoyer aux n^{os} 65 à 69 du Tome I^{er}.

234. Nous observerons maintenant que si e est très petit le premier terme de chaque fonction de Bessel sera plus considérable que tous les autres. Nous pourrons nous borner alors à ce terme si nous nous plaçons au point de vue du n° 216. En partant des formules (16) et remplaçant chaque fonction de Bessel par son développement, nous trouvons

$$(28) \qquad E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} \frac{(-1)^\beta}{\beta!\, \overline{m-p+\beta}!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} E^{iml},$$

et en réduisant chaque fonction de Bessel à son premier terme

$$(29) \qquad \sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p} \frac{E^{iml}}{\overline{m-p}!} + \sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2}\right)^{p-m} \frac{(-1)^{p-m}}{\overline{p-m}!} E^{iml}.$$

Sous le premier signe $\sum$ on doit donner à m toutes les valeurs entières telles que $m-p$ soit positif ou nul, et sous le second signe $\sum$ toutes les valeurs telles que $m-p$ soit négatif.

Mais nous devons observer que l'approximation relative avec laquelle chaque fonction de Bessel est ainsi représentée est d'au-

tant plus faible que l'ordre de cette fonction est plus élevé. Et en effet le rapport du second terme au premier s'écrit ($m - p$ étant positif, par exemple)

$$\left(\frac{me}{2}\right)^2 \frac{1}{m-p+1}.$$

Il est très petit si e est très petit et m fini; mais, quel que soit e, il croît indéfiniment avec m. Pour les termes d'ordre un peu élevé, on obtiendrait une bien meilleure approximation en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée du n° 225.

235. Le développement (28) et les développements analogues procèdent suivant les puissances de e et les exponentielles E^{iml}. Si nous les ordonnons *d'abord* suivant les exponentielles E^{iml}, le coefficient de chaque terme, étant une fonction de Bessel, pourra être développé suivant les puissances de e en une série toujours convergente; de plus, dès qu'on aura calculé les coefficients des différents termes de la série de Fourier, cette série elle-même sera toujours convergente.

Avec cette façon d'ordonner les termes, la convergence est donc assurée, mais il n'en est plus de même si l'on ordonne *d'abord* suivant les puissances de e, le coefficient de chaque terme étant lui-même une fonction de l. Nous sommes donc amenés à nous poser la question suivante :

Nous avons une fonction quelconque de u, dépendant par conséquent de e et de l, nous la développons selon les puissances de e; quel est le rayon de convergence de la série, c'est-à-dire la valeur maximum de $|e|$ pour laquelle la série converge? Cette valeur dépend évidemment de l et je puis la désigner par $\varphi(l)$. Si alors M est la plus petite valeur de $\varphi(l)$, quand l prend toutes les valeurs *réelles* possibles, la convergence de la série sera assurée tant que e ne surpassera pas M.

Pour calculer $\varphi(l)$ et M, nous allons appliquer le théorème de Cauchy. Pour que la série cesse d'être convergente, il faut et il suffit que la fonction cesse d'être holomorphe. Or nous avons

$$l = u - e \sin u,$$

d'où

$$du(1 - e \cos u) = dl + \sin u \, de,$$

ce qui montre que u (et en général toute fonction de u) cesse d'être une fonction uniforme de e et de l pour

$$e = \frac{1}{\cos u}. \tag{30}$$

En combinant l'équation (30) avec celle de Képler, on trouve

$$u - \operatorname{tang} u = l. \tag{31}$$

Les équations (30) et (31) définissent e et sa valeur absolue $|e|$ en fonction de l et la plus petite des déterminations de cette valeur absolue est $\varphi(l)$.

Remarquons que $\varphi(l)$ est le même en général pour toute fonction $F(u)$; il n'y aurait d'exception que si la dérivée $\frac{dF}{du}$ s'annulait précisément pour la valeur de u qui satisfait à l'équation (31). Cela nous permettra de raisonner sur une fonction $F(u)$ quelconque, il nous suffira que la condition d'exception ne soit pas remplie.

236. Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de l pour laquelle $\varphi(l)$ atteint son minimum M. A cet effet je reprends la formule (28) et j'obtiens en la différentiant par rapport à l

$$\frac{E^{ipu}}{1 - e\cos u} = \sum \frac{(-1)^\beta}{\beta!\, \overline{m-p+\beta}!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} E^{iml} = \Phi(l). \tag{32}$$

Cette fonction ne se trouve pas dans le cas d'exception signalé à la fin du numéro précédent, car, quand on a

$$1 - e\cos u = 0,$$

sa dérivée ne s'annule pas et devient au contraire infinie.

Les équations (30) et (31) ne changent pas quand on y change u, l et e en $u + \pi$, $l + \pi$, $-e$; il suit de là que les valeurs critiques de e qui correspondent à l et à $l + \pi$ ont même valeur absolue $\varphi(l) = \varphi(l + \pi)$, mais sont égales et de signe contraire.

Supposons donc que pour une valeur réelle l_1 de l et pour une valeur quelconque de e que j'appelle e_1 la série (32) diverge, il en sera de même quand nous changerons l_1 en $l_1 + \pi$, et il en sera encore de même de la somme

$$\Phi(l_1) + \Phi(l_1 + \pi).$$

Considérons, en effet, $\Phi(l)$ comme une fonction de e et de l et faisons-y $l = l_1$; cette fonction présentera un point singulier pour

$$e = e', \qquad |e'| = \varphi(l_1) < e_1$$

et n'en aura pas pour $e = -e'$; car, si l'on change e en $-e$ dans les équations (30) et (31), l se change en $\pi \pm l$ qui est différent de l sauf pour $l = \frac{\pi}{2}$.

La fonction $\Phi(l_1 + \pi)$ présentera de même un point singulier pour $e = -e'$ et n'en aura pas pour $e = e'$ et la somme

$$\Phi(l_1) + \Phi(l_1 + \pi)$$

présentera deux points singuliers $e = e'$, $e = -e'$, et, ces points singuliers étant distincts, les singularités correspondantes ne pourront se détruire. Donc cette somme divergera pour $e = e_1$.

Je puis donc écrire

$$(33) \quad \Psi(l, e) = \Phi(l) + \Phi(l + \pi) = 2 \sum \frac{(-1)^\beta}{\beta!\, \overline{m - p + \beta}!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} \mathrm{E}^{iml},$$

où l'on ne donne à m que des valeurs *paires*.

Il résulte de ce qui précède que la série $\Psi(l_1, e_1)$ diverge.

Passons de cette série à la suivante :

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}, +i|e_1|\right) = \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

où l'on remplace l'anomalie moyenne par $\frac{\pi}{2}$ et l'excentricité par i multiplié par la valeur absolue de e_1 qui est essentiellement réelle et positive.

Si dans le dernier membre de l'équation (33) nous faisons cette substitution, la valeur absolue de chaque terme demeurera la même; mais tous les termes vont devenir positifs ou tout au moins avoir même argument (en supposant que le nombre p soit pair, ce que nous pouvons faire). En effet, le dénominateur est essentiellement positif, l'argument de $(-1)^\beta$ est $\beta\pi$; celui de

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{m-p+2\beta}$$

est nul si m et p sont pairs comme nous le supposons; celui de

$$(i|e_1|)^{m-p+2\beta}$$

sera

$$(m-p)\frac{\pi}{2}+\beta\pi,$$

celui de E^{iml} sera

$$-m\frac{\pi}{2}.$$

L'argument résultant sera donc

$$-p\frac{\pi}{2}+2\beta\pi$$

$\left(\text{ou encore } -p\frac{\pi}{2}, \text{ en supprimant un multiple de } 2\pi\right)$; il sera donc constant et indépendant de m et de β. C. Q. F. D.

Si donc la série $\Psi(l_1)$ diverge, il en sera de même, *a fortiori*, de $\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ dont les termes ont même valeur absolue, mais avec un argument constant, au lieu d'avoir un argument variable. Donc

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

diverge; il doit donc en être ainsi au moins de l'une des deux séries $\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Mais nous venons de voir que

$$\varphi(l+\pi)=\varphi(l),$$

c'est-à-dire que $\Phi(l+\pi)$ diverge si $\Phi(l)$ diverge, et inversement. Si donc l'une des deux séries diverge, elles divergent toutes deux. Donc

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, i|e_1|\right)$$

diverge. Donc

$$|e_1|>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Or, tout ce que nous avons supposé sur e_1 c'est que

$$|e_1|>\varphi(l);$$

cette seconde inégalité entraîne donc la précédente, c'est-à-dire

que

$$\varphi(l) > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc le minimum de $\varphi(l)$ a lieu pour $l = \frac{\pi}{2}$.

237. Pour déterminer M il faut donc étudier l'équation

$$u - \operatorname{tang} u = \frac{\pi}{2}, \tag{34}$$

ou en posant $\frac{\pi}{2} - u = \varepsilon$

$$\varepsilon + \cot \varepsilon = 0. \tag{34 bis}$$

Je me propose de démontrer que l'équation (34 *bis*) ne peut avoir que des racines purement imaginaires. Posons, en effet,

$$\varphi = \cos \varepsilon \rho,$$

il vient

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \varepsilon^2 \varphi = 0$$

avec [en tenant compte de (34 *bis*)]

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\varphi}{d\rho} = \varphi, & \text{pour} & \rho = 1, \\ \dfrac{d\varphi}{d\rho} = 0, & \text{pour} & \rho = 0. \end{array}\right. \tag{35}$$

Supposons que l'équation (34 *bis*) ait deux racines ε et ε_1 ; à ces deux racines correspondront deux fonctions φ et φ_1, et l'on aura

$$\int_0^1 \left(\varphi \frac{d^2\varphi_1}{d\rho^2} - \varphi_1 \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}\right) d\rho = \left(\varphi \frac{d\varphi_1}{d\rho} - \varphi_1 \frac{d\varphi}{d\rho}\right)_0^1.$$

Le second membre s'annule, tant pour $\rho = 0$ que pour $\rho = 1$, à cause des équations (35), et il reste

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) \int_0^1 \varphi\varphi_1 \, d\rho = 0.$$

Si l'équation (35 *bis*) admet une racine ε, elle admettra la racine imaginaire conjuguée ε_1 ; les deux fonctions φ et φ_1 seront

imaginaires conjuguées, leur produit sera essentiellement positif, de sorte qu'il restera

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2 = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que si ε^2 est réel. Si ε^2 est réel positif, ε est réel. Mais les racines réelles ne sauraient convenir à la question, car l'équation (30) conduirait à une valeur de e plus grande que 1.

Si ε^2 est réel négatif, ε est purement imaginaire. Il s'agit donc de rechercher la plus petite racine purement imaginaire de l'équation (34 *bis*) ou, ce qui revient au même, en changeant ε en $i\varepsilon$, la plus petite racine réelle de

$$\varepsilon(E^{-\varepsilon} - E^{\varepsilon}) + (E^{-\varepsilon} + E^{\varepsilon}) = 0; \tag{36}$$

on en déduira la valeur de M par la formule

$$M = \frac{2}{E^{\varepsilon} - E^{-\varepsilon}}.$$

On trouve ainsi

$$M = 0,6627,$$

ce qui prouve que nos séries convergent toutes les fois que l'excentricité est inférieure à 0,6627; l'équation (36) n'a d'ailleurs qu'une seule racine positive.

CHAPITRE XVI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

238. Il s'agit maintenant de passer au développement de la fonction perturbatrice elle-même et je voudrais exposer d'abord quelques considérations générales sur la façon dont se pose ce problème.

Au n° 212 nous avons rappelé sous quelles formes diverses se présente cette fonction. Nous devons d'abord nous occuper du développement de l'expression (5) du n° 212

$$\frac{-m_1 m_4}{\sqrt{(x'_4-x'_1)^2+(x'_5-x'_2)^2+(x'_6-x'_3)^2}},$$

c'est-à-dire de ce qu'on appelle la partie principale de la fonction perturbatrice; c'est le problème le plus difficile, et, une fois qu'il sera résolu, le développement des autres parties de la fonction perturbatrice s'en déduira presque immédiatement. Supposons, en effet, qu'on ait développé cette expression (5) en fonction des éléments elliptiques osculateurs de la première planète

$$a_1,\quad e_1,\quad i_1,\quad l_1,\quad g_1+\theta_1,\quad \theta_1,$$

et de ceux de la seconde

$$a_2,\quad e_2,\quad i_2,\quad l_2,\quad g_2+\theta_2,\quad \theta_2\ (^1),$$

et que l'on ait trouvé ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_4-x'_1)^2}}=f(a_1,\, a_2,\, \ldots), \tag{1}$$

(1) Cependant pour économiser les indices je désignerai quelquefois ces éléments par a, a', ...

où f est une fonction des 12 éléments elliptiques osculateurs. On en déduira

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_4 - hx'_1)^2}} = f(ha_1, a_2, \ldots), \tag{2}$$

h étant un coefficient constant quelconque. Si, en effet, on change a_1 en ha_1, les autres éléments e_1, i_1, l_1, g_1 et θ_1 ne changeant pas, non plus que les éléments osculateurs de la seconde planète, les coordonnées de la première planète, x'_1, x'_2, x'_3, se changeront en hx'_1, hx'_2, hx'_3, et celles de la seconde planète x'_4, x'_5, x'_6, ne changeront pas.

Or, nous avons vu au n° 36 que la fonction perturbatrice, si l'on adopte les variables du n° 30, prend la forme

$$m_1 m_4\left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{BC}}\right),$$

avec

$$\mathrm{BD}^2 = x'^2_4 + x'^2_5 + x'^2_6 = \sum x'^2_4,$$

$$\mathrm{AB}^2 = \sum\left(x'_4 - \frac{m_7}{m_1 + m_7} x'_1\right)^2,$$

$$\mathrm{BC}^2 = \sum\left(x'_4 + \frac{m_1}{m_1 + m_7} x'_1\right)^2.$$

Il s'agit d'obtenir les développements de

$$\frac{1}{\mathrm{AB}}, \quad \frac{1}{\mathrm{BC}}, \quad \frac{1}{\mathrm{BD}}.$$

Or, l'application de la formule (2) nous donne immédiatement

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} = f\left(\frac{m_7}{m_1 + m_7} a_1, a_2, \ldots\right),$$

$$\frac{1}{\mathrm{BC}} = f\left(\frac{-m_1}{m_1 + m_7} a_1, a_2, \ldots\right),$$

$$\frac{1}{\mathrm{BD}} = f(0, a_2, \ldots).$$

Cette dernière expression $f(0, a_2, \ldots)$ ne peut évidemment dépendre que des éléments de la seconde planète; on l'obtiendra immédiatement si l'on observe qu'elle n'est autre chose que l'expression $\frac{1}{r}$ relative à la seconde planète, et que nous avons appris plus haut au n° 231 à développer $\frac{1}{r}$.

Supposons maintenant que nous ayons adopté, au lieu des variables du n° 30, celles du n° 26 ou celles du n° 44. Il faudra alors développer la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, qui, ainsi que nous l'avons rappelé au n° 213, peut prendre l'une des trois formes suivantes

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}\sum x' x'_4, \qquad \frac{m_1 m_4}{AC^3}\sum x'_1 x'_4, \qquad \frac{1}{m_7}\sum y'_1 y'_4.$$

Reprenons la formule (2) et développons les deux membres suivant les puissances de h en négligeant les termes en h^2 et les termes suivants. En observant que, avec les variables des n^{os} 26 et 44, on a

$$BC^2 = \sum x'^2_4$$

et non plus

$$BD^2 = \sum x'^2_4,$$

il viendra

$$\frac{1}{BC} + h\frac{\Sigma x'_1 x'_4}{BC^3} = f(0, a_2, \ldots) + h a_1 \frac{df}{da_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\Sigma x'_1 x'_4}{BC^3} = a_1 \frac{df}{da_1}. \tag{3}$$

Dans $\frac{df}{da_1}$ il faut faire $a_1 = 0$ après la différentiation.

On trouverait de même

$$\frac{\Sigma x'_1 x'_4}{AC^3} = a_2 \frac{df}{da_2}, \tag{3 bis}$$

et ici encore, dans $\frac{da_2}{df}$, il faudrait faire $a_2 = 0$ après la différentiation.

239. Il reste à développer

$$\sum y'_1 y'_4.$$

Il nous suffira, pour rattacher cette expression à la fonction

$$f(a_1, a_2, \ldots),$$

de la rattacher aux expressions

$$\frac{\Sigma x'_1 x'_4}{BC^3}, \qquad \frac{\Sigma x'_1 x'_4}{AC^3}$$

liées à f par les relations (3) et (3 *bis*).

A cet effet, je les relierai les unes et les autres à la fonction

$$\Psi = \sum x'_1 x'_4.$$

Les équations du mouvement képlérien nous donnent

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{M x_1}{r^3},$$

M étant la masse centrale attirante et r le rayon vecteur, ou bien

$$n^2 \frac{d^2 x_1}{dl^2} = -\frac{M x_1}{r^3},$$

n désignant le moyen mouvement, et l l'anomalie moyenne.

Nous pouvons appliquer cette formule à notre seconde planète fictive puisque les relations entre les coordonnées de la planète et les éléments osculateurs sont les mêmes que dans le mouvement képlérien d'après la définition même des éléments osculateurs.

Nous devons donc changer

$$x_1, \quad r, \quad l, \quad n^2, \quad M$$

en

$$x'_4, \quad BC, \quad l_2, \quad n_2^2 = \frac{M}{a_2^3}, \quad M,$$

d'où

$$\frac{d^2 x'_4}{dl_2^2} = -\frac{a_2^3 x'_4}{BC^3}.$$

Nous aurions deux équations que l'on déduirait de la précédente en changeant x'_4 en x'_5 ou en x'_6. Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées par x'_1, x'_2, x'_3, il viendra

$$\sum x'_1 \frac{d^2 x'_4}{dl_2^2} = -a_2^3 \frac{\Sigma x'_1 x'_4}{BC^3},$$

ou en se reportant à la formule (3) et en se rappelant que x'_1, x'_2, x'_3 ne dépendent pas de l_2, mais seulement des éléments oscula-

teurs de la première planète,

$$(4) \qquad \frac{d^2\Psi}{dl_2^2} = -a_2^3 a_1 \frac{df}{da_1},$$

on trouverait de même

$$(4\ bis) \qquad \frac{d^2\Psi}{dl_1^2} = -a_1^3 a_2 \frac{df}{da_2}.$$

Occupons-nous maintenant de l'expression

$$\sum y'_1 y'_4.$$

Cette expression s'introduit quand on adopte les variables du n° 26; dans ce cas les masses m'_1 et m'_4 attribuées aux deux planètes fictives ont pour valeurs

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_3 = \frac{m_4 m_7}{m_1 + m_7}$$

(*cf.* n° 43); on a alors, *dans le mouvement képlérien,*

$$(5) \qquad y'_1 = m'_1 \frac{dx'_1}{dt}, \qquad y'_4 = m'_4 \frac{dx'_4}{dt}$$

ou bien

$$(6) \qquad y'_1 = m'_1 n_1 \frac{dx'_1}{dl_1}, \qquad y'_4 = m'_4 n_2 \frac{dx'_4}{dl_2},$$

n_1 et n_2 étant les deux moyens mouvements. Les formules (5) ne seraient plus vraies dans le mouvement troublé; mais les formules (6) le seront encore, puisqu'elles expriment une relation entre les x', les y' et les éléments osculateurs et que ces relations sont les mêmes dans le mouvement troublé et dans le mouvement képlérien d'après la définition même des éléments osculateurs.

On aura donc

$$(7) \qquad \sum y'_1 y'_4 = m'_1 m'_4 n_1 n_2 \sum \frac{dx'_1}{dl_1} \frac{dx'_4}{dl_2} = m'_1 m'_4 n_1 n_2 \frac{d^2\Psi}{dl_1\, dl_2}.$$

Ainsi $\sum y'_1 y'_4$ se trouve rattachée à Ψ et par là à f.

240. Considérons maintenant une fonction périodique quel-

conque

$$F(u, u')$$

des deux anomalies excentriques u et u'; elle peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$(8) \qquad \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

les p et les p' étant des entiers positifs ou négatifs, mais on peut aussi la développer en série de Fourier procédant suivant les anomalies moyennes l et l' sous la forme

$$(9) \qquad \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}.$$

Il s'agit de savoir quelles relations il y a entre les coefficients des deux séries (8) et (9). Ces coefficients nous sont donnés l'un et l'autre par des intégrales définies

$$(10) \qquad 4\pi^2 B_{pp'} = \int\int F . E^{-i(pu+p'u')} \, du \, du'$$

et

$$(11) \qquad 4\pi^2 A_{mm'} = \int\int F . E^{-i(ml+m'l')} \, dl \, dl'.$$

Les intégrales doivent être prises entre les limites o et 2π, tant pour u et u' que pour l et l'.

Nous transformerons la formule (11) par une double intégration par parties.

Nous pouvons poser :

$$E^{-i(ml+m'l')} = \frac{d^2 \Phi}{dl \, dl'},$$

avec

$$\Phi = \frac{-1}{mm'} E^{-i(ml+m'l')}.$$

Nous trouvons alors, en intégrant par parties par rapport à u et à l,

$$\int\int F \frac{d^2 \Phi}{dl \, dl'} dl \, dl' = -\int\int \frac{dF}{du} \frac{d\Phi}{dl'} du \, dl',$$

et, en intégrant encore par parties par rapport à u' et à l',

$$\int\int F \frac{d^2 \Phi}{dl \, dl'} dl \, dl' = \int\int \frac{d^2 F}{du \, du'} \Phi \, du \, du';$$

il vient donc

$$-4\pi^2 A_{mm'} mm' = \int\int \frac{d^2 F}{du\, du'} E^{-i(ml+m'l')}\, du\, du'.$$

Or, du développement de F sous la forme (8), nous pourrons déduire

$$\frac{d^2 F}{du\, du'} = -\sum pp' B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

d'où, en tenant compte de l'équation de Képler,

$$4\pi^2 mm' A_{mm'} = \sum pp' B_{pp'} \int\int E^{iA} E^{\Omega}\, du\, du',$$

où

$$A = (p-m)u + (p'-m')u',$$
$$\Omega = i(me \sin u + m'e' \sin u'),$$

et où e et e' désignent bien entendu les deux excentricités.

Le coefficient de $pp'B_{pp'}$ est une intégrale double qui peut se décomposer en le produit de deux intégrales simples

$$\int E^{i(p-m)u} E^{ime \sin u}\, du \int E^{i(p'-m')u'} E^{im'e' \sin u'}\, du',$$

c'est-à-dire

$$4\pi^2 J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

Nous avons donc la formule

$$(12) \qquad A_{mm'} = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e'),$$

tout à fait analogue à la formule (17) du Chapitre précédent. Cette formule est due à M. Baillaut.

241. Cette formule se trouve en défaut quand m ou m' sont nuls. Mais elle peut dans ce cas être modifiée et transformée en une autre analogue à la formule (18) du Chapitre précédent.

Nous avons

$$F(u, u') = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

d'autre part nous avons

$$E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} J_{m-p}(me) E^{iml},$$

formule dans laquelle on doit, pour $m=0$, remplacer le coefficient $\frac{p}{m}J_{m-p}$ par 1 pour $p=0$, par $-\frac{e}{2}$ pour $p=\pm 1$, par 0 dans tous les autres cas. De même on a

$$E^{ip'u'}=\sum \frac{p'}{m'}J_{m'-p'}(m'e')E^{im'l'},$$

avec la même convention pour le cas de $m'=0$.

On en déduit, en remplaçant E^{ipu} et $E^{ip'u'}$ par ces valeurs dans le développement de $F(u, u')$,

$$F(u, u')=\sum \frac{pp'}{mm'}B_{pp'}J_{m-p}(me)J_{m'-p'}(m'e')E^{i(ml+m'l')}.$$

Nous retrouvons ainsi la formule (12) pour le cas où m et m' sont différents de zéro. Cette formule peut s'écrire sous forme de produit symbolique

$$A_{mm'}=\left[\sum \frac{m}{p}J_{m-p}(me)B_p\right]\left[\sum \frac{p'}{m'}J_{m'-p'}(m'e')B'_{p'}\right],$$

en convenant de remplacer le produit symbolique $B_pB'_{p'}$ par $B_{pp'}$.

On trouve de même sous forme de produits symboliques

$$(13)\quad \begin{cases} A_{0m'}=\left[B_0-\frac{e}{2}(B_1+B_{-1})\right]\left(\sum \frac{p'}{m'}J_{m'-p'}B'_{p'}\right), \\ A_{m0}\;=\left(\sum \frac{p}{m}J_{m-p}B_p\right)\left[B'_0-\frac{e'}{2}(B'_1+B'_{-1})\right], \\ A_{00}\;=\left[B_0-\frac{e}{2}(B_1+B_{-1})\right]\left[B'_0-\frac{e'}{2}(B'_1+B'_{-1})\right], \end{cases}$$

formules analogues à la formule (18) du Chapitre précédent.

242. Supposons par exemple qu'il s'agisse de développer la partie principale de la fonction perturbatrice, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_1-x'_4)^2}}=\frac{1}{\Delta}$$

du n° 238.

Nous observons que

$$\Delta^2=\sum(x'_1-x'_4)^2$$

se présente sous la forme d'un polynome du deuxième degré par rapport aux exponentielles

$$E^{iu}, \quad E^{-iu}, \quad E^{iu'}, \quad E^{-iu'},$$

u étant l'anomalie excentrique relative à la première planète et u' l'anomalie excentrique relative à la deuxième planète. Et, en effet, x'_1, x'_2, x'_3 sont des polynomes du premier degré en E^{iu}, E^{-iu} et x'_4, x'_5, x'_6 sont des polynomes du premier degré en $E^{iu'}$, $E^{-iu'}$.

En examinant de plus près, nous voyons que ce polynome contiendra seulement un terme tout connu et des termes en

$$E^{\pm 2iu}, \quad E^{\pm iu}, \quad E^{\pm 2iu'}, \quad E^{\pm iu'}, \quad E^{i(\pm u \pm u')},$$

en tout treize termes. Nous étudierons plus loin ce polynome plus en détail; mais, pour le moment, observons que si l'on fait

$$x = E^{iu}, \quad y = E^{iu'},$$

l'expression $x^2y^2\Delta^2$ deviendra un polynome entier du sixième degré en x et y que l'on peut appeler $R(x, y)$, d'où

$$x^2y^2\Delta^2 = R(x, y).$$

La formule (10), si l'on y fait $F = \frac{1}{\Delta}$, devient alors

$$(14) \qquad -4\pi^2 B_{pp'} = \int\int \frac{dx\,dy}{\Delta\, x^{p+1} y^{p'+1}} = \int\int \frac{dx\,dy}{x^p y^{p'} \sqrt{R(x, y)}},$$

ce qui montre que $B_{pp'}$ est exprimé par une intégrale double définie dépendant de la racine carrée du polynome entier R. Seulement les valeurs que l'on doit donner à x et à y sont imaginaires; on doit faire varier l'une et l'autre de ces deux variables le long d'un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine.

On peut aussi exprimer le coefficient $A_{mm'}$ par une intégrale définie, mais cette intégrale est plus compliquée. Nous avons trouvé en effet

$$-4\pi^2 mm' A_{mm'} = \int\int \frac{d^2 F}{du\, du'} E^{-i(ml+m'l')}\, du\, du',$$

et l'intégrale double peut s'écrire

$$\int\int \frac{d^2 \frac{1}{\Delta}}{dx\, dy} E^{\Omega} \frac{dx\, dy}{x^m y^n},$$

où Ω a le même sens qu'au n° 240 et s'écrit

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[me\left(x - \frac{1}{x}\right) + m'e'\left(y - \frac{1}{y}\right)\right].$$

La dérivée seconde de $\frac{1}{\Delta}$ serait encore égale à une fonction rationnelle de x et de y divisée par $\sqrt{R(x, y)}$, mais il vaut mieux partir directement de la formule (11) en remarquant que

$$E^{-i(ml+m'l')} = x^{-m}y^{-n}E^{\Omega},$$

$$dl = \frac{dx}{ix}\left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right], \qquad dl' = \frac{dy}{iy}\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

On trouve ainsi

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}\, dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}, \tag{15}$$

avec

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Seulement ici l'intégrale (15) est beaucoup plus compliquée que l'intégrale (14) parce que la fonction sous le signe $\int$ n'est plus algébrique, mais contient l'exponentielle E^{Ω}. On voit pour quelle raison le développement suivant les anomalies moyennes est plus compliqué que le développement suivant les anomalies excentriques.

243. Il y a deux cas particuliers sur lesquels nous reviendrons plus loin en détail, mais dont je voudrais dès maintenant dire quelques mots.

C'est d'abord celui où les excentricités sont nulles. Dans ce cas il n'y a plus à faire de distinctions entre les anomalies moyennes et les anomalies excentriques, et l'on a $\Omega = 0$; de plus l'origine de ces anomalies devient arbitraire et nous pouvons les compter à partir de la ligne des nœuds. Nous trouvons alors

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\sigma,$$

où σ désigne l'angle des deux rayons vecteurs, ou bien

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos^2\frac{J}{2}\cos(u - u') - 2aa'\sin^2\frac{J}{2}\cos(u + u'),$$

ou bien enfin

$$(16)\quad \begin{cases} R(x, y) = xy\Big[(a^2 + a'^2)\,xy - aa'\cos^2\dfrac{J}{2}(x + y) \\ \qquad\qquad - aa'\sin^2\dfrac{J}{2}(x^2y^2 + 1)\Big]. \end{cases}$$

244. Le second cas est celui où l'inclinaison mutuelle des deux orbites est nulle; on peut alors choisir les axes de coordonnées de telle sorte que

$$x'_3 = x'_6 = 0,$$

d'où

$$\Delta^2 = [(x'_1 - x'_4) + i(x'_2 - x'_5)]\,[(x'_1 - x'_4) - i(x'_2 - x'_5)].$$

On voit ainsi que $R(x, y)$ est le produit de deux polynomes entiers du troisième degré

$$R(x, y) = R_1(x, y)\,R_2(x, y).$$

Le premier de ces deux polynomes $R_2(x, y)$ contient seulement des termes en

$$x^2y, \quad xy^2, \quad xy, \quad x \quad \text{et} \quad y.$$

Les deux courbes du troisième degré

$$R_1 = 0, \qquad R_2 = 0$$

passent par l'origine et ont des points à l'infini communs; elles se coupent en outre en 4 points dont il est aisé d'interpréter la signification.

A chaque point M de la première orbite correspond une valeur de u et par conséquent une valeur de x; à chaque point M′ de la deuxième orbite correspond une valeur de u' et par conséquent une valeur de y. L'équation $R_1 = 0$ exprime que la droite MM′ a pour coefficient angulaire i; l'équation $R_2 = 0$ signifie que MM′ a pour coefficient angulaire $-i$.

Les quatre intersections des deux courbes du troisième degré $R_1 = R_2 = 0$ correspondent aux quatre intersections (généralement imaginaires) des deux orbites elliptiques.

Si l'on suppose que y et par conséquent M′ soient données, l'équation $R_1 = 0$ est une équation du deuxième degré en x; cela s'explique parce que la droite de coefficient angulaire i qui passe

par M' coupe la première orbite elliptique en deux points M et M_1. Les deux points M et M_1 se confondent, de sorte que l'équation $R_1 = 0$ a deux racines égales et que l'on a

$$\frac{dR_1}{dx} = 0,$$

toutes les fois que la droite MM' est tangente à la première orbite elliptique : cette tangente à l'ellipse ayant pour coefficient angulaire $-t$ passe alors par l'un des deux foyers de la deuxième orbite elliptique.

De même, si la droite MM' passe par l'un des deux foyers de la deuxième orbite elliptique, on a

$$\frac{dR_1}{dy} = 0.$$

Mais les deux ellipses ont un foyer commun qui est l'origine. Pour la droite MM' correspondante, on a

$$\frac{dR_1}{dy} = \frac{dR_1}{dy} = 0,$$

ce qui (en regardant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan) montre que la courbe du troisième degré $R_1 = 0$ (de même que la courbe $R_2 = 0$) a un point double. Pour $R_1 = 0$, ce point double est

$$x = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}, \qquad y = \frac{e'}{1+\sqrt{1-e'^2}},$$

et pour $R_2 = 0$

$$x = \frac{e}{1-\sqrt{1-e^2}}, \qquad y = \frac{e'}{1-\sqrt{1-e'^2}}.$$

245. Nous avons vu au n° **238** que le calcul de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice se déduisait aisément de celui de la partie principale. Mais il y a mieux à faire, car le premier de ces calculs est beaucoup plus aisé que le second, de sorte qu'il est préférable de le faire directement.

Nous avons vu au n° **239** que, si l'on pose

$$\Psi = \sum x'_1 x'_4,$$

les trois formes de la partie complémentaire, auxquelles on est conduit si l'on adopte les variables des n^os^ 26 et 44, sont respectivement proportionnelles aux trois dérivées secondes de Ψ.

Cherchons donc à développer Ψ et pour commencer étudions le développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{ipu+-ip'u'}$; il sera aisé d'en déduire ensuite par le moyen de la formule (12) le développement procédant suivant les exponentielles $E^{iml+im'l'}$.

Or x'_1, x'_2, x'_3 sont des polynomes du premier degré en $E^{\pm iu}$, x'_4, x'_5, x'_6 sont des polynomes du premier degré en $E^{\pm iu'}$. Donc Ψ est un polynome de premier degré en $E^{\pm iu}$ d'une part, en $E^{\pm iu'}$ d'autre part, de sorte que le développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{ipu+ip'u'}$ se composera de neuf termes seulement.

Il résulte de là que, si l'on applique la formule (12) au développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{iml+im'l'}$, chaque coefficient $A_{mm'}$ dépendra seulement d'un nombre fini de fonctions de Bessel. On peut donc, en se servant des relations de récurrence entre ces fonctions de Bessel, ramener ce coefficient à ne plus dépendre que des transcendantes

$$J_m(me),\quad J'_m(me),\quad J_{m'}(m'e'),\quad J'_{m'}(m'e').$$

246. Hansen prend pour variable indépendante l'anomalie excentrique u de l'une des planètes; supposons alors qu'il ait développé la fonction perturbatrice, ou l'une de ses dérivées, ou l'une des composantes de la force perturbatrice sous la forme

$$F = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

nous avons

$$l = u - e \sin u,$$
$$l' = u' + e' \sin u'.$$

D'autre part, dans la fonction perturbatrice dont tous les termes contiennent en facteur la masse perturbatrice, nous pouvons, en négligeant le carré de cette masse, appliquer les formules du mouvement képlérien. Alors l et l' sont des fonctions linéaires du temps et sont par conséquent liées par une relation linéaire. J'écris

$$l' = kl + \varepsilon,$$

k étant le rapport des moyens mouvements et ε une constante.

J'ai alors

$$l' = ku + \varepsilon - ke \sin u,$$

ou en posant

$$u_1 = ku + \varepsilon,$$
$$l' = u_1 - ke \sin u,$$

et enfin

$$u_1 = u' - e' \sin u' + ke \sin u.$$

Proposons-nous de développer F sous la forme

$$\mathrm{F} = \sum \mathrm{A}_{mm'} \mathrm{E}^{i(mu+m'u_1)}.$$

Il viendra

$$-4\pi^2 \mathrm{A}_{mm'} = \int\int \mathrm{F}\,\mathrm{E}^{-i(mu+m'u_1)}\,du\,du_1,$$

ou en intégrant par parties par rapport à u_1 et à u', c'est-à-dire comme si u était une constante,

$$+4\pi^2 \mathrm{A}_{mm'} = \int\int \frac{i}{m'}\frac{d\mathrm{F}}{du'}\,\mathrm{E}^{-i(mu+m'u_1)}\,du\,du'.$$

Mais

$$\frac{d\mathrm{F}}{du'} = i\sum p'\,\mathrm{B}_{pp'}\,\mathrm{E}^{i(pu+p'u')},$$

d'où

$$-4\pi^2 \mathrm{A}_{mm'} = \int\int \sum \frac{p'}{m'}\,\mathrm{B}_{pp'}\,\mathrm{E}^{i(pu+p'u')}\,\mathrm{E}^{-i(mu+m'u_1)}\,du\,du'.$$

Mais le produit des deux exponentielles sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\mathrm{E}^{i(p-m)u}\,\mathrm{E}^{-ikm'e\sin u}\,\mathrm{E}^{i(p'-m')u'}\,\mathrm{E}^{im'e'\sin u'}.$$

On trouve donc finalement

$$(16') \qquad \mathrm{A}_{mm'} = \sum \frac{p'}{m'}\,\mathrm{B}_{pp'}\,\mathrm{J}_{m-p}(-km'e)\,\mathrm{J}_{m'-p}(m'e').$$

247. Gyldén cherche à développer la fonction perturbatrice non plus en fonction des anomalies moyennes, ni en fonction des anomalies excentriques, mais en fonction des anomalies vraies. Si v et v' sont les deux anomalies vraies et qu'on veuille développer la fonction F sous la forme

$$\mathrm{F} = \sum \mathrm{C}_{mm'}\,\mathrm{E}^{i(mv+m'v')},$$

les coefficients de la série seront donnés par la formule

$$-4\pi^2 C_{mm'} = \int\int F E^{-i(mv+m'v')} dv\, dv'.$$

Si l'on pose $E^{iv} = x$, $E^{iv'} = y$, cette intégrale double se transforme en une autre où la fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle de x, de y et de Δ, et où Δ lui-même est la racine carrée d'une fonction rationnelle de x et de y. C'est ce qui arrivait déjà dans le développement suivant les anomalies excentriques. Les deux développements présentent donc à peu près le même degré de difficulté.

On pourrait chercher d'ailleurs des formules analogues à la formule (12) et qui permettraient de passer de l'un à l'autre.

Il faut ensuite tout exprimer en fonction de la variable indépendante choisie qui est l'anomalie vraie de l'une des planètes. Pour cela, il faut se livrer à un calcul analogue à celui du numéro précédent; mais pour lequel il n'existe malheureusement pas de formule aussi simple.

Nous avons une relation entre l et v que je puis écrire

$$l = v + \varphi(v, e),$$

$\varphi(v, e)$ étant une fonction périodique de v, et de même

$$l' = v' + \varphi(v', e'),$$

et enfin

$$l' = kl + \varepsilon,$$

d'où, en posant

$$v_1 = kv + \varepsilon,$$

$$v_1 = v' + \varphi(v', e') - k\varphi(v, e). \tag{17}$$

Il s'agit ensuite, à l'aide de l'équation (17), de développer l'exponentielle

$$E^{i(mv+m'v')}$$

en série procédant suivant les exponentielles

$$E^{i(pv+p'v_1)}.$$

L'analogie avec le calcul du numéro précédent est évidente.

CHAPITRE XVII.

LES COEFFICIENTS DE LAPLACE.

248. Nous commencerons par le cas où les excentricités sont toutes deux nulles, ainsi que l'inclinaison mutuelle des orbites. L'expression Δ^2 prend alors la forme

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(l - l'),$$

comme nous l'avons vu au n° 243. Il s'agit de développer

$$\frac{1}{\Delta},$$

mais nous ne nous bornerons pas là, pour les raisons exposées au n° 215, et nous nous efforcerons de calculer le développement de Δ^{-2s}, $2s$ étant un entier impair quelconque.

Nous observerons d'abord que Δ^2 est homogène du deuxième degré par rapport à a et à a', et d'autre part que Δ^2 ne dépend des angles l et l' que par l'intermédiaire de

$$\cos(l - l') = \cos(u - u') = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

Je rappelle que, quand les excentricités sont nulles, les anomalies moyennes ne se distinguent pas des anomalies excentriques.

Nous sommes ainsi conduits à poser

supposer que l'on a désigné par a le plus petit des deux grands axes.

Nous sommes donc conduits à développer

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \left[(1 - \alpha z)\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}\right]$$

suivant les puissances entières positives et négatives de z sous la forme

$$\sum b_s^{(k)} z^k = \sum b_s^{(k)} E^{ik(l-l')}.$$

Les coefficients $b_s^{(k)}$ ont reçu le nom de *coefficients de Laplace*.

249. Si nous posons

$$F = (1 - \alpha z)\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right),$$

nous voyons que F ne change pas, ni par conséquent F^{-s} quand on change z en $\frac{1}{z}$. Or cela revient à changer k en $-k$; on a donc

$$b_s^{(k)} = b_s^{(-k)}. \tag{1}$$

D'autre part changer k en $-k$ cela revient à changer i en $-i$; l'égalité précédente montre que les coefficients ne changent pas quand on change i en $-i$, nos coefficients sont donc réels, et nous pouvons écrire

$$F^{-s} = b_s^0 + 2\sum b_s^{(k)} \cos k(l - l'). \tag{2}$$

Il y a entre les coefficients de Laplace certaines relations de récurrence qui en facilitent le calcul et qu'il est aisé de déduire de l'identité

$$F^{-s} = \sum b_s^{(k)} z^k. \tag{3}$$

Nous avons identiquement

$$s\frac{dF}{dz}F^{-s} + \frac{dF^{-s}}{dz}F = 0$$

[illegible]

[illegible]

d'où en égalant à zéro le coefficient de z^{k-1} :

$$0 = s\alpha(b_s^{(k+1)} - b_s^{(k-1)}) + (1+\alpha^2)\,k\,b_s^{(k)} - \alpha[(k+1)\,b_s^{(k+1)} + (k-1)\,b_s^{(k-1)}]$$

d'où la relation de récurrence

$$(5)\quad \alpha b_s^{(k+1)}(s-k-1) + \alpha b_s^{(k-1)}(-s-k+1) + (1+\alpha^2)\,k\,b_s^{(k)} = 0.$$

Nous avons ensuite

$$F^{-s} = \left[1 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right] F^{-s-1}$$

ou

$$\sum b_s^{(k)} z^k = \left[1 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right] \sum b_{s+1}^{(k)} z^k,$$

ou en égalant à zéro le coefficient de z^k :

$$(6)\qquad b_s^{(k)} = (1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(k)} - \alpha(b_{s+1}^{(k+1)} + b_{s+1}^{(k-1)}),$$

relation de récurrence qui permettrait de passer des b_{s+1} aux b_s; mais il serait préférable de chercher une relation de récurrence permettant de passer des b_s aux b_{s+1}. Nous pouvons prendre deux relations (6) consécutives qui nous donneront deux équations entre $b_s^{(k)}$, $b_s^{(k+1)}$ et les quatre inconnues $b_{s+1}^{(k-1)}$, $b_{s+1}^{(k)}$, $b_{s+1}^{(k+1)}$, $b_{s+1}^{(k+2)}$. D'autre part les relations (5) nous fournissent deux autres relations entre ces quatre inconnues. Nous pouvons donc déterminer ces quatre inconnues en fonction de $b_s^{(k)}$, $b_s^{(k+1)}$.

Pour arriver directement au même résultat, nous partirons de l'identité

$$(7)\qquad zFP + z^2\frac{dF}{dz}Q = 1,$$

où P et Q sont des polynomes du premier degré; il est facile d'établir cette identité et de déterminer les polynomes P et Q. Cela posé, nous pouvons observer que les coefficients de la série (3) peuvent être établis par la formule de Fourier :

En vertu de l'identité (7), nous pouvons multiplier la fonction sous le signe $\int$ par le premier membre de cette identité, ce qui donne

$$2 i\pi b_s^{(k)} = \int F^{1-s} z^k P \, dz + \int \frac{dF}{dz} F^{-s} z^{k+1} Q \, dz.$$

Nous pouvons transformer la seconde intégrale par une intégration par parties, en observant que, l'intégration se faisant le long d'une ligne fermée, nous pouvons laisser de côté la partie qui sort du signe $\int$ et qui prend la même valeur aux deux limites. Notre intégrale devient ainsi :

$$\frac{1}{s-1} \int F^{1-s} \left[(k+1) z^k Q + z^{k+1} \frac{dQ}{dz} \right] dz.$$

Mais il est clair que

$$P + \frac{1}{s-1} \left[(k+1) Q + z \frac{dQ}{dz} \right]$$

est un polynome du premier degré en z; soit

$$\beta z + \gamma$$

ce polynome, notre équation devient

$$2 i\pi b_s^{(k)} = \int F^{(1-s)} (\beta z^{k+1} + \gamma z^k) \, dz,$$

d'où

$$b_s^{(k)} = \beta b_{s+1}^{(k+2)} + \gamma b_{s-1}^{(k+1)}. \tag{8'}$$

C'est la relation de récurrence cherchée.

Grâce aux relations de récurrence (5), (6) et (8), le calcul des coefficients de Laplace peut être ramené à celui de deux quelconques d'entre eux, par exemple

[illegible]

En différentiant la formule (8) sous le signe $\int$, il vient :

$$2i\pi \frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = \frac{1}{s} \int F^{-s-1}\left(z + \frac{1}{z} - 2\alpha\right) z^{k-1}\, dz,$$

d'où

$$\frac{1}{s}\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = b_{s+1}^{(k+1)} + b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)}, \tag{9}$$

ce qui permet d'exprimer les dérivées des b_s en fonction des b_{s+1} et par conséquent en fonction des b_s.

Nous pourrons donc finalement, par ce moyen, exprimer la dérivée $\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha}$ en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0$, $b_{\frac{1}{2}}^1$, sous la forme

$$\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = P b_{\frac{1}{2}}^0 + Q b_{\frac{1}{2}}^1, \tag{10}$$

P et Q étant des fonctions rationnelles en α.

En différentiant la relation (10), nous trouvons :

$$\frac{d^2 b_s^{(k)}}{d\alpha^2} = b_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dP}{d\alpha} + b_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dQ}{d\alpha} + P\frac{db_{\frac{1}{2}}^0}{d\alpha} + Q\frac{db_{\frac{1}{2}}^1}{d\alpha},$$

de sorte que la dérivée seconde est exprimée en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0$, $b_{\frac{1}{2}}^1$ et de leurs dérivées premières, et peut par conséquent, par une nouvelle application de la formule (10), être exprimée en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0$ et $b_{\frac{1}{2}}^1$ seulement.

On opérerait de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

231. Nous avons

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s}\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}.$$

Or la formule du binome nous donne

$$(1 - \alpha z)^{-s} = 1 + s\alpha z + \frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^2 z^2 + \ldots,$$

ou plus généralement

où Γ représente la fonction eulérienne. De même

$$(1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \sum \frac{\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)\Gamma(q+1)} \alpha^q z^{-q}$$

ou, par multiplication,

$$F^{-s} = \sum \frac{\Gamma(s+p)\Gamma(s+q)}{\Gamma^2(s)\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)} \alpha^{p+q} z^{p-q},$$

ce qui nous donne pour le coefficient de z^k :

$$b_s^{(k)} = \sum \frac{\Gamma(s+q)\Gamma(s+q+k)}{\Gamma^2(s)\Gamma(q+1)\Gamma(q+k+1)} \alpha^{k+2q}, \tag{11}$$

formule qui donne le développement des coefficients de Laplace suivant les puissances croissantes de α. Nous remarquerons tout d'abord que $b_s^{(k)}$ est divisible par α^k, et que c'est une fonction paire ou impaire de α suivant que k est pair ou impair.

Rapprochons la série (11) de la série hypergéométrique de Gauss. Cette série s'écrit :

$$F(A, B, C, x) = \sum \frac{\Gamma(A+q)\Gamma(B+q)\Gamma(C)}{\Gamma(q+1)\Gamma(C+q)\Gamma(A)\Gamma(B)} x^q.$$

La comparaison nous donne immédiatement

$$b_s^{(k)} = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)} \alpha^k F(s, s+k, k+1, \alpha^2).$$

252. On sait que la série hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation linéaire du second ordre, il doit en être de même de $b_s^{(k)}$. C'est en effet ce qu'il est aisé de vérifier. Nous voyons en effet que dans la série (11) le rapport du terme général au précédent est

$$\frac{(s+q-1)(s+q+k-1)}{q(q+k)} \alpha^2.$$

Si donc j'appelle C_q le coefficient de α^{k+2q}, nous aurons

$$q(q+k) C_q = (s+q-1)(s+q+k-1) C_{q-1},$$

d'où

$$\sum q(q+k) C_q \alpha^{2q+k} = \sum (s+q-1)(s+q+k-1) C_{q-1} \alpha^{2q+k},$$

Or, si nous observons que

$$b = \sum C_q \alpha^{2q+k}, \qquad \alpha \frac{db}{d\alpha} = \sum (2q+k) C_q \alpha^{2q+k},$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b}{d\alpha^2} = \sum (2q+k)(2q+k-1) C_q \alpha^{2q+k}$$

et que de même

$$\alpha^2 b = \sum C_{q-1} \alpha^{2q+k}, \qquad \alpha^3 \frac{db}{d\alpha} = \sum (2q+k-2) C_{q-1} \alpha^{2q+k},$$

$$\alpha^4 \frac{d^2 b}{d\alpha^2} = \sum (2q+k-2)(2q+k-3) C_{q-1} \alpha^{2q+k};$$

si nous remarquons de plus que les coefficients du premier et du second membre de (12) qui sont $q(q+k)$, $(s+q-1)(s+q+k-1)$ sont des polynomes du second degré en q et par conséquent peuvent s'exprimer linéairement, le premier à l'aide de

$$1, \quad 2q+k, \quad (2q+k)(2q+k-1),$$

le second à l'aide de

$$1, \quad 2q+k-2, \quad (2q+k-2)(2q+k-3),$$

les coefficients ne dépendant que de k et de s, nous verrons qu'il y a une relation linéaire entre les six quantités

$$b, \quad \alpha \frac{db}{d\alpha}, \quad \alpha^2 \frac{d^2 b}{d\alpha^2}, \quad \alpha^2 b, \quad \alpha^3 \frac{db}{d\alpha}, \quad \alpha^4 \frac{d^2 b}{d\alpha^2},$$

relation dont les coefficients ne dépendent que de k et s. C'est l'équation différentielle cherchée.

J'ai supprimé pour abréger les indices s et k de $b_s^{(k)}$.

Cette équation s'écrit

$$(13) \quad (\alpha^2 - \alpha^4) \frac{d^2 b}{d\alpha^2} + [\alpha - (4s+1)\alpha^3] \frac{db}{d\alpha} - [4s^2\alpha^2 + k^2(1-\alpha^2)] b = 0.$$

Elle peut nous indiquer comment se comporte la série (11) pour les valeurs de α voisines de 1. Les méthodes de Fuchs nous apprennent en effet que les intégrales de cette équation ne peuvent présenter de singularités que quand le coefficient de $\frac{d^2 b}{d\alpha^2}$ s'annule,

c'est-à-dire pour

$$\alpha = 0, \qquad \alpha = \pm 1.$$

Pour $\alpha = 0$, les racines de l'équation déterminante sont $\pm k$, ce qui veut dire que l'équation admet une intégrale particulière développable suivant les puissances de α et commençant par un terme en α^k (cette intégrale n'est autre chose que la fonction $b_s^{(k)}$ qui nous occupe) et que l'intégrale générale est de la forme

$$S + h b_s^{(k)} \log \alpha,$$

h étant une constante quelconque et S une série procédant suivant les puissances entières croissantes positives ou négatives de α et commençant par un terme en α^{-k}.

Restent les points singuliers $\alpha = \pm 1$; je me contenterai d'examiner le point $\alpha = +1$; puisque l'équation différentielle ne change pas quand on change α en $-\alpha$.

Pour $\alpha = +1$, les racines de l'équation déterminante sont 0 et $1 - 2s$; ce qui montre que, outre une intégrale particulière développable suivant les puissances de $\alpha - 1$, l'intégrale générale est de la forme

$$S + P \log(\alpha - 1),$$

où P et S sont développables suivant les puissances entières croissantes de $\alpha - 1$, le développement commençant pour P par un terme de degré 0, pour S par un terme de degré $1 - 2s$.

Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $1 - 2s = 0$ et S ne devient pas infinie, c'est le second terme qui est prépondérant, de sorte que $b_s^{(k)}$ devient infini pour $\alpha = 1$ de la même manière que $\log(\alpha - 1)$. Pour $s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, le terme S devient infini et prépondérant de sorte que $b_s^{(k)}$ devient infini de la même manière que

$$(\alpha - 1)^{1-2s}.$$

On voit par là que la série (11) converge pour

$$|\alpha| < 1$$

[illegible] pour $|\alpha| > 1$. Les résultats précédents se déduisent [illegible] des propriétés connues de la série hyper- [illegible]

253. On a proposé un très grand nombre de procédés de calcul pour les coefficients de Laplace, mais il y en a un qui est très supérieur à tous les autres, c'est celui qui est fondé sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Nous savons que la fonction $p(u)$ de Weierstrass est définie par l'équation

$$[p'(u)]^2 = 4p^2(u) - g_2 p(u) - g_3 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3),$$

où e_1, e_2, e_3 sont trois constantes liées par la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

avec la condition

$$p(0) = \infty.$$

Nous savons en outre qu'elle satisfait aux conditions

$$p(u) = p(-u) = p(u + 2\omega_1) = p(u + 2\omega_2) = p(u + 2\omega_3);$$

$$p(\omega_1) = e_1, \qquad p(\omega_2) = e_2, \qquad p(\omega_3) = e_3.$$

D'autre part la fonction $\zeta(u)$, qui est telle que

$$\zeta'(u) = -p(u)$$

jouit de la propriété

$$\zeta(u) = -\zeta(-u), \qquad \zeta(u + 2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i,$$

où

$$\eta_i = \zeta(\omega_i), \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Reprenons l'intégrale

$$b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^k \, dz}{\sqrt{z(1 - \alpha z)(z - \alpha)}}$$

et plus généralement la suivante :

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^{k-1} \, dz}{F^s} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^{k-1+2s} \, dz}{[z(1 - \alpha z)(z - \alpha)]^s}.$$

Pour identifier aux formules des fonctions elliptiques, nous devons poser :

$z = p(u) - e_3$, [illegible], $e_1 + e_2 + e_3 = 0$,

d'où

[illegible]

d'où

$$\left(\frac{-\alpha}{4}\right)^s 2 i\pi b_s^{(k)} = \int (p - e_3)^{k-1+2s} p'^{1-2s}\, du \tag{14}$$

et, en particulier,

$$\pi\sqrt{\alpha}\, b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \int (p - e_3)^{k-1+2s}\, du. \tag{15}$$

254. Rappelons une propriété importante des fonctions doublement périodiques : c'est la possibilité de décomposer ces fonctions en éléments simples.

Soit $F(u)$ une fonction doublement périodique, soient a_1, a_2, ..., a_n ses infinis distincts; bien entendu je ne regarde pas comme distincts deux infinis quand ils ne diffèrent que par des multiples des périodes $2\omega_i$.

Soit a_j l'un de ces infinis qui sera, je suppose, d'ordre k; développons $F(u)$ suivant les puissances croissantes de $u - a_j$, et soient

$$\frac{A_k}{(u-a_j)^k} + \frac{A_{k-1}}{(u-a_j)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(u-a_j)^2} + \frac{A_1}{u-a_j}$$

l'ensemble des termes de ce développement qui ont un exposant négatif. Posons

$$\begin{aligned}\Phi_j(u) = A_1\zeta(u-a_j) - \frac{A_2}{1!}\zeta'(u-a_j) + \frac{A_3}{2!}\zeta''(u-a_j) - \ldots \\ \pm \frac{A_k}{k-1!}\zeta^{(k-1)}(u-a_j),\end{aligned}$$

où $\zeta^{(k)}(u)$ représente la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $\zeta(u)$ par rapport à n.

De cette façon la différence

$$F(u) - \Phi_j(u)$$

reste finie pour $u = a_j$. Nous aurons alors

$$F(u) = \sum \Phi_j(u) + C, \tag{16}$$

C étant une constante. C'est cette formule bien connue (16) qui représente la décomposition de $F(u)$ en éléments simples.

Revenons aux intégrales (14) et (15); elles doivent être prises de 0 à $2\omega_1$. Si nous désignons la fonction sous le signe $\int$ par

$F(u)$, nous décomposerons $F(u)$ en éléments simples, et nous intégrerons séparément chacun de ces éléments. Parmi ces éléments il y en a qui nous donneront zéro, ce sont les éléments

$$\int \zeta^{(k)}(u-a_j)\,du,$$

où $k \geqq 2$; l'intégrale indéfinie nous donne

$$\zeta^{(k-1)}(u-a_j),$$

qui est (au signe près) la fonction $p(u-a_j)$ si $k=2$ et une de ses dérivées si $k>2$. Dans tous les cas ce sera une fonction doublement périodique qui reprendra la même valeur aux deux limites o et $2\omega_1$; l'intégrale définie est donc nulle.

Si $k=1$

$$\int \zeta'(u-a_j)\,du = \zeta(u-a_j),$$

et l'intégrale définie est

$$\zeta(2\omega_1-a_j)-\zeta(-a_j)=2\eta_1.$$

Si $k=0$, on a

$$\int \zeta(u-a_j)\,du = \log\sigma(u-a_j),$$

et l'intégrale définie est

$$\frac{\log\sigma(2\omega_1-a_j)}{\log\sigma(-a_j)} = i\pi + 2\eta_1(\omega_1-a_j). \tag{17}$$

Nous n'aurons pas d'ailleurs à faire d'application de la formule (17) dans ce Chapitre.

Reste enfin la constante C qui nous donne

$$\int C\,du = 2C\omega_1.$$

Dans le cas qui nous occupe, et qui est celui des intégrales (14) et (15), la fonction $F(u)$ ne peut devenir infinie qu'avec $p(u)$ ou $p'(u)$, c'est-à-dire pour

$$u=0, \quad \omega_1, \quad \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_3.$$

J'ajoute que, pour $s = \frac{1}{2}$ [formule (15)], elle devient infinie seulement pour $u = 0$.

De plus, l'exposant $1 - 2s$ est pair, et, comme $p'^2(u)$ est une fonction rationnelle de $p(u)$, il en sera de même de $F(u)$. Donc $F(u)$ sera une fonction paire de u, ainsi que de $u - \omega_i$

$$F(u) = F(-u), \qquad F(u) = F(2\omega_i - u).$$

Donc le développement de $F(u)$ suivant les puissances croissantes de u ou de $u - \omega_i$ ne contiendra que des termes d'ordre pair; il ne contiendra donc pas de terme de degré -1 [qui aurait pu donner un élément simple en $\zeta(u)$ ou $\zeta(u - \omega_i)$]; et c'est pour cette raison que nous n'aurons pas à faire usage de la formule (17). Nous n'avons pas à nous inquiéter des termes de degré -4, -6, ..., qui, comme nous l'avons vu, donneraient une intégrale nulle, mais seulement des termes de degré -2, ainsi que de la constante C; nous trouvons ainsi pour notre intégrale

$$2i\pi\left(\frac{-\alpha}{4}\right)^s b_s^{(k)} = 2C\omega_1 - 2\eta_1 \sum A_2, \tag{18}$$

$\sum A_2$ étant la somme des coefficients des termes de degré -2 dans les développements relatifs aux quatre infinis 0, ω_1, ω_2, ω_3.

255. Ces coefficients C et A_2 sont des fonctions rationnelles de α. En effet le développement de $p(u)$ ou de $p'(u)$ suivant les puissances croissantes de u ou de $u - \omega_i$ a pour coefficients des fonctions rationnelles de e_1, e_2, e_3 et, par conséquent, de α; il en est donc de même du développement de

$$F(u) = (p - e_3)^{k-1+2s} p'^{1-2s}.$$

Donc tous nos coefficients A_2 sont rationnels en α.

Parlons maintenant de C. Nous observerons que F non seulement ne peut devenir infinie que pour $u = 0$, ω_1, ω_2, ω_3, mais ne peut non plus s'annuler que pour l'une de ces quatre valeurs de u. Il en résulte que $F(u)$ ne peut pas admettre les quatre infinis, mais seulement une partie d'entre eux, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier; pour celles de ces quatre valeurs pour lesquelles

ne devient pas infinie elle s'annulera de sorte que l'on aura

$$(19) \qquad o = C + \sum (-1)^{k-1} \frac{A_k}{k-1!} \zeta^{(k-1)}(u - \omega_i)$$

pour $u = o, \omega_1, \omega_2, \omega_3$; et pour $\omega_i = o, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. D'ailleurs on n'aura pas $u = \omega_i$, puisque u est une des valeurs pour lesquelles F s'annule, et ω_i une des valeurs pour lesquelles F est infinie. Donc

$$u - \omega_i = \omega_1, \quad \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_3 \qquad \text{(à une période près).}$$

Mais A_k est rationnelle en α. Il en sera de même de $\zeta^{(k)}(\omega_1)$, $\zeta^{(k)}(\omega_2)$, $\zeta^{(k)}(\omega_3)$, qui sont des dérivées de $p(u)$ pour $u = \omega_1, \omega_2$ ou ω_3, et nous venons de rappeler que ces dérivées sont des fonctions rationnelles de e_1, e_2, e_3 et, par conséquent, de α. L'équation (19) montre donc que C est rationnel en α. C. Q. F. D.

En particulier nous avons pour

$$s = \frac{1}{2}, \qquad k = o, \qquad F(u) = 1,$$

d'où

$$b_{\frac{1}{2}}^{0} = \frac{2\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}}$$

pour

$$s = \frac{1}{2}, \qquad k = 1, \qquad F(u) = p(u) - e_3 = -e_3 - \zeta'(u),$$

d'où

$$b_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{-2\eta_1 + \frac{2}{3}\omega_1\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\sqrt{\alpha}}.$$

Pour un coefficient $b_s^{(k)}$ quelconque nous trouverions de même

$$b_s^{(k)} = \frac{P\eta_1 + Q\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}},$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de α. On déterminerait aisément ces fonctions rationnelles à l'aide des relations de récurrence du n° 249.

236. Il reste [illegible] pour cela je renverrai aux [illegible] des fonctions

elliptiques rédigées d'après Weierstrass par M. Schwarz et traduites de l'allemand par M. Padé (Paris, Gauthier-Villars, 1894). Portons-nous à la page 61. Deux cas sont à distinguer, et d'abord celui où

$$e_2 - e_3 < e_1 - e_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha < \frac{1}{\alpha} - \alpha, \quad \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas nous poserons

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}},$$

et alors, en supposant

$$h = E^{\frac{\pi \omega_3 i}{\omega_1}},$$

ce qui est le q de Jacobi, nous aurons

$$l = \frac{2h + 2h^9 + \ldots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots},$$

d'où

$$(20) \qquad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots.$$

On calculera h par la formule (20) et l'on trouvera ensuite

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\alpha b_{\frac{1}{2}}^0} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{\alpha} = 2\left(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \ldots\right), \\ \sqrt{b_{\frac{1}{2}}^0} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots, \\ \sqrt{(1-\alpha^2) b_{\frac{1}{2}}^0} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha} - \alpha} = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les formules (6), (7), (8) de Schwarz, mais nous ferons usage pour le calcul de $b_{\frac{1}{2}}^0$ de la formule

$$(22) \qquad \sqrt{b_{\frac{1}{2}}^0} = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots),$$

qui est la formule (4) de Schwarz, et pour le calcul de $b_{\frac{1}{2}}^1$ de la formule

$$(23) \qquad \frac{12\eta_1\omega_1}{\pi^2} = \frac{1 - 3^3 h^2 + 5^3 h^6 - \ldots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - \ldots},$$

qui est la formule (5) de Schwarz.

Le second cas est celui où $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On se servira alors des formules (18) et suivantes de Schwarz et l'on posera

$$l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}}, \qquad h_1 = \mathrm{E}^{-\frac{\omega_1 i \pi}{\omega_3}},$$

et l'on retrouvera la formule

$$(20\ bis) \qquad h_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + \ldots$$

analogue à (20).

Nous aurons ensuite

$$(22\ bis) \qquad \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt[4]{\alpha}}}(1 + 2h_1^4 + \ldots),$$

$$(23) \qquad b_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{2\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}} = \left(\frac{\omega_3}{\pi i}\right)\left(\log\frac{1}{h_1}\right)\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha}},$$

formules (19) de Schwarz. Quant à η_1 et η_3 et par conséquent $b_{\frac{1}{2}}^1$, on les déduira des formules

$$(23\ bis) \qquad 2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 - 3^3 h_1^2 + \ldots}{1 - 3h_1^2 + \ldots},$$

$$(24) \qquad \eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \pi i.$$

On remarquera que ω_3 et η_3 sont purement imaginaires.

257. Il importe de se rendre compte de la rapidité de la convergence; cette rapidité est extrême; en effet, si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$l < \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1}, \qquad h < \mathrm{E}^{-\pi},$$

et si $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$l_1 < \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1}, \qquad h_1 < \mathrm{E}^{-\pi}.$$

Suivant le cas, l ou l_1 sera $< 0,08$; tandis que h ou h_1 sera $< 0,04$. Or les séries qui procèdent suivant les puissances de h et

qui ne sont autres que les séries Θ de Jacobi ou des séries analogues, et qui ne contiennent par exemple que des termes où l'exposant de h est un carré parfait, convergent très rapidement.

Les séries (20) et (20 *bis*), qui donnent h et h_1, convergent aussi très rapidement, puisque dans le cas le plus défavorable les termes successifs sont respectivement plus petits que

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10^6}, \quad \frac{1}{10^{10}}, \quad \frac{1}{10^{15}}.$$

Et même en négligeant $2h^4$, c'est-à-dire $\frac{1}{2000000}$, on a pour $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[4]{b_{\frac{1}{2}}^0} = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}},$$

et pour $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$b_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha}} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt[4]{\alpha}\right)^2} \log \frac{2 + 2\sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}}.$$

CHAPITRE XVIII.

LES POLYNOMES DE TISSERAND.

258. Nous allons examiner maintenant le cas où, les excentricités étant toujours nulles, l'inclinaison mutuelle des orbites est quelconque. Dans ce cas, nous pouvons ne pas faire de distinction entre les anomalies vraies, moyennes ou excentriques et nous avons trouvé au nº 243

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\sigma,$$

$$\cos\sigma = \cos^2\frac{J}{2}\cos(u-u') + \sin^2\frac{J}{2}\cos(u+u').$$

Il s'agit de développer

$$\frac{1}{\Delta^{2s}},$$

et nous trouvons d'abord, en appliquant la formule (2) du Chapitre précédent,

$$\text{(1)}\qquad F^{-s} = \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s} = b_s^0 + 2\sum b_s^{(k)}\cos k\sigma.$$

Il reste à développer $\cos k\sigma$; c'est ce qu'a fait Tisserand en employant les artifices suivants :

259. Posons

$$\cos^2\frac{J}{2} = \mu,\qquad \sin^2\frac{J}{2} = \nu,\qquad \xi = u - u',\qquad \eta = u + u',$$

$$\cos\sigma = \mu\cos\xi + \nu\cos\eta,\qquad x = E^{iu},\qquad y = E^{iu'},$$

$$z = \frac{x}{y},\qquad w = xy,\qquad [illegible]$$

[illegible]

La formule du polynome, généralisation de la formule du binome, nous donne

$$Z = \sum A(-\alpha\mu z)^a(-\alpha\mu z^{-1})^p(-\alpha\nu w)^c(\alpha\nu w^{-1})^q(\alpha^2)^e$$

avec

$$(2)\quad A = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-a-b-c-d-e-s)\Gamma(a+1)\Gamma(p+1)\Gamma(c+1)\Gamma(q+1)\Gamma(e+1)},$$

a, q, c, p, e étant des entiers *positifs* quelconques et Γ étant la fonction eulérienne, ou bien encore

$$(3)\qquad Z = \sum A(-1)^{a+p+c+q}\alpha^{a+p+c+q+2e}\mu^{a+p}\nu^{c+q}z^{a-p}w^{c-q}.$$

Nous voulons développer Z, d'une part, suivant les puissances de α et, d'autre part, suivant les cosinus et les sinus des multiples des anomalies ou, ce qui revient au même, suivant les puissances positives et négatives de z et de w. Nous chercherons donc le coefficient de

$$\alpha^m z^h w^k,$$

où m est entier positif, h et k entiers positifs ou négatifs. Nous ferons donc

$$m = a + p + c + q + 2e,$$
$$h = a - p, \qquad k = c - q.$$

L'exposant $a+p$ de μ est plus grand en valeur absolue que h et en diffère d'un nombre pair; l'exposant $c+q$ de ν est plus grand en valeur absolue que k et en diffère d'un nombre pair. La somme de ces deux exposants est plus petite que m et en diffère d'un nombre pair. Le coefficient cherché est donc un polynome entier en μ^2 et ν^2 de degré

$$\frac{m-|h|-|k|}{2}$$

multiplié par le facteur

$$(-1)^{h+k}\mu^{|h|}\nu^{|k|}.$$

Nous observerons en effet que

$$(-1)^{a+p+c+q} = (-1)^{a-p+c-q} = (-1)^{h+k}.$$

Supposons d'abord h et k positifs de façon que $h = |h|$, $k = |k|$ et formons le polynome P en question de sorte que le coefficient cherché soit

$$(-1)^{h+k} \gamma^h \nu^k \mathrm{P}.$$

Faisons donc

$$m - h - k = 2g, \qquad m + h + k = 2f,$$
$$a + p = h + 2p, \qquad c + q = k + 2q,$$

d'où

$$a + p + c + q + e = \frac{m + h + k}{2} + p + q,$$
$$e = \frac{m - h - k}{2} - p - q;$$

il viendra, en se reportant aux formules (2) et (3),

$$) \qquad \mathrm{P} = \sum \frac{\Gamma(1-s)\mu^{2p}\nu^{2q}}{\Gamma(1-f-s-p-q)\Gamma(h+p+1)\Gamma(k+q+1)\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(1+g-p-q)}.$$

Nous observerons que m et $h + k$ sont de même parité et, par conséquent, que f, g, $\alpha + s$ et β sont entiers. Cela va nous permettre de transformer la formule; et, en effet, si l est un entier, on a

$$(5) \qquad \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-l)} = \frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s)}(-1)^l.$$

Cette formule résulte de la relation connue

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi},$$

et du fait que, si l est entier, on a

$$\sin(s+l)n = (-1)^l \sin s\pi.$$

260. Le polynome P n'est autre chose, à un facteur constant près, que l'un des cas particuliers de la série hypergéométrique à deux variables étudiée par M. Appell. Introduisons, en effet, la notation de M. Appell, en posant

$$(\alpha, m) = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}(-1)^m.$$

La première expression se présente sous une forme indéter-

minée quand α et $\alpha + m$ sont des entiers négatifs; mais il est aisé de voir que la vraie valeur est alors le produit

$$(\alpha + m - 1)(\alpha + m - 2)\ldots(\alpha + 1)\alpha$$

et d'ailleurs la deuxième expression est alors déterminée.

Nous aurons alors

$$(1, p) = \Gamma(p+1), \qquad (1, q) = \Gamma(q+1),$$

$$(h+1, p) = \frac{\Gamma(h+p+1)}{\Gamma(h+1)}, \qquad (k+1, q) = \frac{\Gamma(k+q+1)}{\Gamma(k+1)},$$

$$(f+s, p+q) = (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(1-f-s)}{\Gamma(1-f-s-p-q)},$$

$$(-g, p+q) = (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(1+g)}{\Gamma(1+g-p-q)};$$

d'où

$$P = \frac{\Gamma(1-s) P_1}{\Gamma(1-f-s)\Gamma(h+1)\Gamma(k+1)\Gamma(g+1)} \tag{6}$$

et

$$P_1 = \sum \frac{(f+s, p+q)(-g, p+q)}{(h+1, p)(1, p)(k+1, q)(1, q)} \mu^{2p} \nu^{2q}. \tag{7}$$

On reconnaît, dans l'expression (7), la série hypergéométrique à deux variables de M. Appell.

Nous avons supposé dans ce qui précède h et k positifs, mais nous n'avons pas ainsi restreint la généralité et, en effet, Z ne change pas quand on change, soit z en z^{-1}, soit w en w^{-1}; d'où il suit que le coefficient de

$$\alpha^m z^h w^k$$

est le même que celui de

$$\alpha^m z^{-h} w^k, \quad \alpha^m z^h w^{-k}, \quad \alpha^m z^{-h} w^{-k}.$$

261. On sait que la fonction de M. Appell satisfait à deux équations aux dérivées partielles; on doit s'attendre à ce qu'il en soit ainsi de notre polynome P qui n'en diffère que par un facteur constant; c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Soient, en effet, Z′ et Z″ les dérivées premières et secondes de Z par rapport à

$$F = \alpha^2 - 2\alpha(\mu \cos\xi + \nu \cos\eta) + 1,$$

il viendra

$$(8)\qquad \frac{dZ}{d\alpha} = 2Z'(\alpha - \mu\cos\xi - \nu\cos\eta);$$

$$(9)\qquad \frac{dZ}{d\mu} = -2Z'\alpha\cos\xi, \qquad \frac{dZ}{d\nu} = -2Z'\alpha\cos\eta,$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2Z}{d\xi^2} &= 4\alpha^2\mu^2Z''\sin^2\xi + 2\alpha\mu Z'\cos\xi, \\ \frac{d^2Z}{d\eta^2} &= 4\alpha^2\nu^2 Z''\sin^2\eta + 2\alpha\nu Z'\cos\eta, \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2Z}{d\mu^2} = 4\alpha^2Z''\cos^2\xi, \qquad \frac{d^2Z}{d\mu\,d\nu} = 4\alpha^2Z''\cos\xi\cos\eta, \\ &\frac{d^2Z}{d\nu^2} = 4\alpha^2Z''\cos^2\eta, \end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad \frac{d^2Z}{d\alpha^2} = 4Z''(\alpha - \cos\sigma)^2 + 2Z',$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2Z}{d\alpha\,d\mu} &= -4\alpha Z''(\alpha - \cos\sigma)\cos\xi - 2Z'\cos\xi, \\ \frac{d^2Z}{dx\,d\nu} &= -4\alpha Z''(\alpha - \cos\sigma)\cos\eta - 2Z'\cos\eta, \end{aligned}\right.$$

ce qui nous montre que ces onze dérivées partielles de Z peuvent s'exprimer linéairement en fonctions des neuf quantités suivantes :

$$(14)\qquad \left\{\begin{matrix} Z', & Z'\cos\xi, & Z'\cos\eta, \\ Z'', & Z''\cos\xi, & Z''\cos\eta, \\ Z''\cos^2\xi, & Z''\cos\xi\cos\eta, & Z''\cos^2\eta, \end{matrix}\right.$$

les coefficients étant des polynomes entiers en α, μ, ν.

D'ailleurs, ces quantités (14) ne sont pas indépendantes, elles sont liées par les relations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1+\alpha^2)Z'' - 2\alpha\mu Z''\cos\xi \\ &\qquad - 2\alpha\nu Z''\cos\eta = -(s+1)Z', \\ &(1+\alpha^2)Z''\cos\xi - 2\alpha\mu Z''\cos^2\xi \\ &\qquad - 2\alpha\nu Z''\cos\xi\cos\eta = -(s+1)Z''\cos\xi. \\ &(1+\alpha^2)Z''\cos\eta - 2\alpha\mu Z''\cos\xi\cos\eta \\ &\qquad - 2\alpha\nu Z''\cos^2\eta = -(s+1)Z'\cos\eta. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de comprendre l'origine de ces trois relations.

De

$$Z = F^{-s}$$

nous déduisons

$$FZ'' = -(s+1)Z'.$$

En remplaçant F par sa valeur, on aura la première relation (15) et l'on aura la deuxième ou la troisième en multipliant la première par $\cos\xi$ ou par $\cos\eta$.

Mais nous pouvons aller plus loin; les relations (8) à (13) nous montrent que les onze dérivées

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha\dfrac{dZ}{d\alpha},\quad \dfrac{dZ}{d\mu},\quad \dfrac{dZ}{d\nu},\quad \dfrac{d^2Z}{d\xi^2},\quad \dfrac{d^2Z}{d\eta^2},\\ \dfrac{d^2Z}{d\mu^2},\quad \dfrac{d^2Z}{d\mu\,d\nu},\quad \dfrac{d^2Z}{d\nu^2},\quad \alpha^2\dfrac{d^2Z}{d\alpha^2},\quad \alpha\dfrac{d^2Z}{d\alpha\,d\mu},\quad \alpha\dfrac{d^2Z}{d\alpha\,d\nu}\end{array}\right.$$

s'expriment linéairement en fonctions des dix quantités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{llll} Z'\alpha^2, & Z'\alpha\cos\xi, & Z'\alpha\cos\eta, & \\ Z''\alpha^2, & Z''\alpha^2\cos^2\xi, & Z''\alpha^2\cos\xi\cos\eta, & Z''\alpha^2\cos^2\eta,\\ Z''\alpha^4, & Z''\alpha^3\cos\xi, & Z''\alpha^3\cos\eta, & \end{array}\right.$$

les coefficients étant des polynomes entiers en μ et en ν *indépendants de* α. D'autre part, la première relation (15), multipliée par α^2, sera une relation linéaire entre les dix quantités (17); nous avons donc douze relations linéaires entre les vingt-deux quantités (16) et (17); en éliminant les dix quantités (17) il nous restera deux relations entre les quantités (16).

Il y a donc, entre les onze dérivées (16), *deux relations linéaires dont les coefficients sont des polynomes entiers en* μ *et en* ν.

Or nous pouvons poser

$$Z = \sum U\alpha^m z^h w^k = \sum U\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)}$$

avec (si par exemple h et k sont positifs)

$$U = (-1)^{h+k}\mu^h\nu^k P.$$

On voit alors que, dans les onze quantités (16), le coefficient de

$$\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)}$$

réduit respectivement à

$$m\mathrm{U},\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\mu},\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\nu},\quad -h^2\mathrm{U},\quad -k^2\mathrm{U},$$

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu^2},\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu\,d\nu},\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\nu^2},\quad m(m-1)\mathrm{U},\quad m\frac{d\mathrm{U}}{d\mu},\quad m\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}.$$

Si donc nous prenons l'une des deux relations linéaires dont il ent d'être question et qui lient les dérivées (16) et que, dans ette relation, j'égale à zéro le coefficient de

$$\alpha^m \mathrm{E}^{i(h\xi+k\eta)},$$

obtiendrai une relation linéaire entre les dérivées

$$\mathrm{U},\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\mu},\quad \frac{d\mathrm{U}}{d\nu},\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu^2},\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu\,d\nu},\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\nu^2}. \tag{8}$$

Donc le coefficient U *satisfait à deux équations linéaires aux érivées partielles du deuxième ordre, dont les coefficients nt des polynomes entiers en* μ *et* ν.

Ce sont les équations de M. Appell.

262. Je rappelle la forme de ces équations telles que M. Appell s a établies dans son Mémoire du *Journal de Liouville* (p. 182, 382).

$$\text{(9)}\quad \begin{cases} (x-x^2)r - y^2 t - 2xys \\ \quad + [\gamma + (\alpha+\beta+1)x]p - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - x^2 r - 2xys \\ \quad + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations x et y sont les variables; z est la fonction connue, p et q sont ses deux dérivées du premier ordre; r, s, t s trois dérivées du deuxième ordre.

Pour passer de ces équations à celles auxquelles doit satisfaire U, suffit de faire

$$x = \mu^2,\qquad y = \nu^2,\qquad z = \mu^{-h}\nu^{-k}\mathrm{U},$$
$$\alpha = f+s,\qquad \beta = -g,$$
$$\gamma = h+1,\qquad \gamma' = k+1.$$

Mais une première observation se présente. Les équations li-

néaires simultanées (19) ne comportent pas une solution unique; elles comportent quatre solutions linéairement indépendantes, ainsi que l'a montré M. Appell. Quelle est alors, dans le cas qui nous occupe, la signification de ces diverses solutions?

Reportons-nous à ce que nous avons dit au n° **242**, et appliquons des principes analogues au problème qui nous occupe; nous verrons que le coefficient de $z^h w^k$ dans le développement de Z sera égal à

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int\int\frac{Z\,dz\,dw}{z^{h+1}w^{k+1}}. \tag{20}$$

L'intégration doit être prise par rapport à z le long d'un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité et par rapport à w le long d'un cercle analogue tracé dans le plan des w. La combinaison de ces deux cercles définit un contour fermé à deux dimensions le long duquel doit être prise l'intégrale double. En d'autres termes, *le coefficient cherché est une période de l'intégrale double* (20).

Pour avoir U, il faut développer ce coefficient, qui dépend de α, suivant les puissances croissantes de α et conserver le coefficient de α^m.

Mais l'intégrale double (20) possède d'autres périodes que celle que nous considérons; une quelconque de ces périodes est fonction de α et peut être développée suivant les puissances croissantes de α. Le coefficient de α^m dans ce développement satisfera aux mêmes équations différentielles de U. *La multiplicité des solutions des équations* (19) *s'explique donc par la multiplicité des périodes de l'intégrale* (20).

263. La série hypergéométrique de M. Appell

$$\sum\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)}x^n y^n$$

peut être exprimée par le moyen d'une intégrale définie, mais je me bornerai sur ce point à quelques brèves indications. Considérons l'intégrale

$$\int u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$$

que nous prendrons le long d'une ligne allant de l'infini à l'infini en passant entre les deux points o et 1.

On pourra faire, par exemple, $u = \frac{1}{2} + iu'$ et faire varier u' par valeurs réelles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Cette intégrale sera finie et déterminée pourvu que

$$p + q < 1.$$

Dans ces conditions, *à un facteur près* C facile à déterminer et *qui ne change pas quand p ou q augmente d'un nombre entier,* notre intégrale est égale à

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

D'autre part, notre série hypergéométrique (à un facteur constant près, indépendant de x et de y comme de m et de n) est égale à

$$\sum \frac{\Gamma(1-\gamma-m)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha \quad m-n)} \frac{\Gamma(1-\gamma'-n)\Gamma(\gamma'-\beta-m)}{\Gamma(1-\beta-m-n)}$$
$$\times \frac{(1+\beta-\gamma', m)x^m}{(1, m)} \frac{(1+\alpha-\gamma, n)y^n}{(1, n)}.$$

On voit que chaque terme sous le signe $\sum$ est décomposé en quatre facteurs; le premier facteur c'est l'intégrale

$$\int u^{-\gamma-m}(1-u)^{\gamma-1-\alpha-n}\,du,$$

à un facteur près C qui est indépendant de m et de n, puisque m et n sont entiers (et que le facteur C, ainsi que nous venons de le remarquer, ne change pas quand l'un des exposants augmente d'un nombre entier).

De même le second facteur, à un facteur constant près, c'est l'intégrale

$$\int v^{-\gamma'-n}(1-v)^{\gamma'-1-\beta-m}\,dv.$$

Remarquons que toutes nos intégrales sont finies, au moins pour les valeurs de α, β, γ, γ', qui satisfont à certaines inégalités.

Le troisième facteur est un terme du développement de

$$(1-x)^{\gamma'-\beta-1} = \sum A_m x^m$$

et le quatrième est un terme du développement de

$$(1-y)^{\gamma-\alpha-1} = \sum B_n y^n.$$

Nous trouvons donc

$$\sum \int\int du\, dv\, u^{-\gamma-m}(1-u)^{\gamma-1-\alpha-n} v^{-\gamma'-n}(1-v)^{\gamma'-1-\beta-m} A_m x^m B_n y^n,$$

ou bien

$$\sum \int\int du\, dv\, u^{-\gamma}(1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'}(1-v)^{\gamma'-1-\beta} A_m\left[\frac{x}{u(1-v)}\right]^m B_n\left[\frac{y}{v(1-u)}\right]^n,$$

ou bien

$$\int\int du\, dv\, u^{-\gamma}(1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'}(1-v)^{\gamma'-1-\beta}\left[1-\frac{x}{u(1-v)}\right]^{\gamma'-\beta-1}\left[1-\frac{y}{v(1-u)}\right]^{\gamma-1-\alpha},$$

ou enfin

$$(21) \qquad \int\int du\, dv\, u^a v^b (u-uv-x)^c (v-uv-y)^d$$

avec

$$a = 1+\beta-\gamma-\gamma', \qquad b = 1+\alpha-\gamma-\gamma',$$
$$c = \gamma'-\beta-1, \qquad d = \gamma-1-\alpha.$$

L'intégrale doit être prise tant par rapport à u que par rapport à v le long d'une ligne allant de l'infini à l'infini en passant entre 0 et 1. Les autres solutions des équations (19) pourraient être représentées par cette même intégrale (21) prise le long d'autres contours convenablement choisis.

264. Envisageons toutes les séries

$$\sum \frac{(\alpha_1, m+n)(\beta_1, m+n)}{(\gamma_1, m)(\gamma'_1, n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où les constantes α_1, β_1, γ_1, γ'_1 sont égales à α, β, γ, δ augmentés d'un nombre entier. Je dis que toutes ces séries pourront s'exprimer

linéairement à l'aide de quatre d'entre elles, les coefficients de l'expression linéaire étant des fonctions rationnelles de x et de y.

Soient, en effet, z_1, z_2, z_3, z_4 quatre solutions des équations (19); la solution générale de ces équations sera une combinaison linéaire de ces quatre solutions; quand x et y reviendront à leurs valeurs primitives, après avoir varié d'une manière continue, il pourra se faire que ces solutions ne reviennent pas à leur valeur primitive, si les variables x et y ont tourné autour d'un point singulier. Mais alors les solutions z_1, z_2, z_3, z_4 auront subi une transformation linéaire à coefficients constants; c'est tout à fait analogue à ce qui se passe dans le cas des équations différentielles linéaires ordinaires.

Cela posé, considérons quatre systèmes d'équations analogues aux équations (19), mais où les constantes α, β, γ, γ' aient des valeurs différentes, et supposons que la différence des valeurs de α pour deux de ces équations soit un nombre entier (et de même pour β, γ, γ'); soient

$$\begin{array}{cccc} z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)}, & z_4^{(1)}, \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)}, & z_4^{(2)}, \\ z_1^{(3)}, & z_2^{(3)}, & z_3^{(3)}, & z_4^{(3)}, \\ z_1^{(4)}, & z_2^{(4)}, & z_3^{(4)}, & z_4^{(4)} \end{array}$$

les quatre solutions fondamentales de chacune de ces quatre équations. De ce que les différences entre les α, ... sont supposées être des nombres entiers, il résulte ceci, ainsi que le montrerait aisément l'étude des équations (19), c'est que, si x et y décrivent un contour fermé,

$$z_1^{(i)}, \quad z_2^{(i)}, \quad z_3^{(i)}, \quad z_4^{(i)}$$

subiront *la même* transformation linéaire que

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4.$$

Donc les déterminants contenus dans la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ z_1^{(2)} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ z_1^{(3)} & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ z_1^{(4)} & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{array} \right\|$$

seront multipliés par un même facteur. Les rapports de ces déterminants sont donc des fonctions uniformes et l'on verrait aisément (puisque nous n'aurions pas de point singulier transcendant) que ces fonctions uniformes sont rationnelles. Nos déterminants sont donc proportionnels à des fonctions

$$R, \quad R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad R_4$$

qui sont des polynomes entiers en x et en y; de sorte que nous aurons la relation

$$R z_1 + R_1 z_1^{(1)} + R_2 z_1^{(2)} + R_3 z_1^{(3)} + R_4 z_1^{(4)} = 0, \tag{22}$$

ce qui montre la possibilité d'exprimer linéairement toutes nos fonctions à l'aide de quatre d'entre elles.

On arriverait facilement au même résultat en partant des intégrales (21), ce qui permettrait de former effectivement ces relations (22). Je reviendrai plus loin sur ce point.

Il semble d'abord que ce résultat, important pour la théorie des séries hypergéométriques les plus générales, soit sans intérêt dans le cas particulier qui nous occupe; cas où ces séries se réduisent à des polynomes entiers. Mais il faut observer que ces polynomes peuvent être de degré très élevé, car le nombre m du n° 259 d'où dépend ce degré peut être très grand; tandis que les degrés des polynomes R de la relation (22) restent limités si les différences entre les α (ou entre les β, les γ, les γ') restent des entiers limités, surtout si ces différences sont toutes égales à o ou à ± 1; c'est ce qui permettrait d'établir entre les polynomes hypergéométriques de M. Appell un système de relations de récurrence qui en faciliterait considérablement le calcul.

Ces relations seraient analogues aux relations de récurrence établies par Gauss entre ses séries hypergéométriques et que l'on trouvera à la page 130 du Tome III de ses *Œuvres complètes*, éditées par la Société de Göttingen.

265. Quels sont les points singuliers de la série de M. Appell, considérée comme fonction de x et de y. On peut les trouver de deux manières différentes, en partant des équations (19). Je suppose que l'on ait différentié ces deux équations par rapport aux deux variables x et y; on obtiendra quatre équations, où figureront

linéairement les quatre dérivées troisièmes de z. Les coefficients de ces quatre dérivées dans ces quatre équations seront

$$\begin{array}{cccc} x-x^2 & -2xy & -y^2 & 0, \\ 0 & x-x^2 & -2xy & -y^2, \\ -x^2 & -2xy & y-y^2 & 0, \\ 0 & -x^2 & -2xy & y-y^2, \end{array}$$

dont le déterminant est égal à

$$x^2y^2(x^2+y^2+1-2xy-2x-\alpha y).$$

Les points singuliers nous sont alors donnés par $x=0$, $y=0$ et

$$x^2+y^2+1-2xy-2x-2y=0,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1. \tag{23}$$

On pourrait arriver au même résultat en partant de l'intégrale (21); les points singuliers de la fonction définie par cette intégrale s'obtiendront en envisagent les quatre facteurs de la fonction sous le signe $\int$

$$u, \quad v, \quad u-uv-x, \quad v-uv-y.$$

Si l'on regarde un instant u et v comme des coordonnées rectangulaires et qu'on égale ces facteurs à zéro, on obtiendra les équations de deux droites et celles de deux hyperboles. Il y aura un point singulier, si les deux hyperboles se touchent ou si trois de ces facteurs s'annulent à la fois.

Quand la variable x tourne autour de zéro, deux des solutions particulières des équations (19) ne changent pas et deux autres sont multipliées par un facteur constant; il en est de même quand la variable y tourne autour de zéro. Quand x et y tournent autour d'un point singulier satisfaisant à l'équation (23), il y a trois solutions qui ne changent pas et une qui est multipliée par un facteur constant. On vérifierait aisément ces résultats et l'on déterminerait ces facteurs par l'étude des équations (19).

Dans le cas particulier qui nous occupe, la série de M. Appell se réduit à un polynome, elle n'a donc aucun point singulier et les points singuliers que nous venons de déterminer appartiennent seulement aux solutions des équations (19).

D'autre part, dans ces cas particuliers, nous avons

$$x = \mu^2 = \cos^4 \frac{J}{2}, \qquad y = \nu^2 = \sin^4 \frac{J}{2},$$

d'où

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

Nous retombons donc justement sur l'un des points singuliers définis par l'équation (23). Cela n'a pas d'inconvénient puisque ces points singuliers, comme je viens de le dire, n'appartiennent pas à notre polynome, mais seulement aux autres solutions des équations (19). Nous verrons même bientôt qu'il résulte de là une simplification.

266. Jusqu'ici nous avons raisonné comme si μ et ν étaient deux variables indépendantes. Nous savons qu'elles sont liées par la relation

$$\mu + \nu = 1$$

de sorte que le polynome P, qui était entier en μ^2 et ν^2, devient un polynome entier en ν seulement. M. Appell a transformé les équations (19) en y remplaçant y par ν^2 et x par $(1-\nu)^2$; il montre ainsi (*Journal de Liouville*, 1884), par un calcul que je ne reproduirai pas, que la solution générale z de ces équations (19) et par conséquent P satisfait à une équation du troisième ordre. Il forme cette équation (p. 418) et l'écrit :

$$(24) \quad (\nu - \nu^2)^2 z''' + (\nu - \nu^2)(a + b\nu) z'' + (c + d\nu + e\nu^2) z' + (l\nu + p) z = 0,$$

z', z'', ... sont les dérivées successives de z par rapport à ν; les constantes a, b, ... ont pour valeurs

$$\begin{aligned}
a &= A - \gamma + 2\gamma' = +3k + 2 + s, \\
b &= -2A - \gamma - \gamma' = -3(h + k + 1) - 2s, \\
c &= (2\gamma' - 1)(A - \gamma) = (2k + 1)(k + s), \\
d &= -2(2B + 2A\gamma' - \gamma') = -4B + 4(k+1)\left(h + k + s - \frac{1}{2}\right), \\
e &= 4B + (2A - 1)(\gamma + \gamma')\, 4B + 2\left(h + k + s - \frac{1}{2}\right)(h + k + 2), \\
l &= 4B(\gamma + \gamma' - 1) = 4B(h + k + 1), \\
p &= 2B(1 - 2\gamma') = -2B(2k + 1);
\end{aligned}$$

$$A = \alpha + \beta + 1, \quad B = \alpha\beta = -g(f + s).$$

Comment se fait-il que nos équations (19), qui admettaient quatre solutions indépendantes, se trouvent transformées en une équation du troisième ordre qui n'en admet plus que trois? Cela est aisé à expliquer. En effet, la relation $\mu + \nu = 1$ équivaut à la relation (23) qui définit un des points singuliers. Quand on tourne autour de ce point singulier, trois solutions restent holomorphes, tandis que la quatrième est multipliée par un facteur constant, elle devient donc nulle ou infinie (suivant les valeurs de α, etc.) au point singulier; donc, quand on fait $\mu = 1 - \nu$, l'une des quatre solutions disparaît et il n'en reste plus que trois.

267. Dans le cas particulier de $s = \frac{1}{2}$, il se produit une grande simplification, comme l'avait montré M. Tisserand et comme l'a retrouvé depuis M. Appell par un calcul que nous allons résumer. Désignons toujours, en effet, par les lettres p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et à y, et faisons

$$x = \mu^2 = (1 - \nu)^2, \qquad y = \nu^2,$$

il viendra

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\nu} = 2(q\nu - p\mu), \\ \dfrac{d^2z}{d\nu^2} = 4(r\mu^2 - 2s\mu\nu + t\nu^2) + 2(p + q). \end{cases}$$

En éliminant r, s et t entre ces deux équations et les deux équations (19), et se rappelant que $\mu + \nu = 1$, on trouve

$$(25\ bis) \qquad \nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2} + (A\nu + B)\frac{dz}{d\nu} + Cz = 2D(p\mu + q\nu)$$

où A, B, C, D sont des constantes, et où

$$D = \alpha + \beta - \gamma - \gamma' + \frac{3}{4};$$

en remplaçant α, β, γ, γ' par leurs valeurs

$$f + s, \quad -g, \quad h + 1, \quad k + 1,$$

et nous rappelant que

$$f - g = h + k,$$

nous trouverons

$$D = s - \frac{1}{2}.$$

Donc, pour $s = \frac{1}{2}$, notre inconnue z satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre que l'on obtient en égalant à zéro le premier membre de (25 *bis*). On reconnaît la forme des équations auxquelles satisfont les séries hypergéométriques de Gauss à une variable.

Donc dans le cas de $s = \frac{1}{2}$, *notre polynome* P *se réduit à une série hypergéométrique de Gauss à une seule variable.* Il arrive alors qu'une seconde solution des équations (19) s'annule identiquement pour $\mu + \nu = 1$. L'élimination de r, s, t entre les équations (19) et (25) présente quelques particularités. Si l'on ajoute les équations (19) et seconde équation (25) respectivement multipliées par

$$\mu, \quad \nu, \quad \frac{\mu\nu}{4},$$

on verra disparaître à la fois les termes en r, s et t si l'on suppose

$$\mu + \nu = 1:$$

il nous restera donc après l'élimination non pas une, mais deux équations dont la combinaison fournira (25 *bis*).

268. Supposons maintenant $s = 1$. Il semble d'abord que cela n'ait pas d'intérêt puisque s doit toujours être la moitié d'un nombre impair. Mais on verra bientôt que la simplification que nous allons obtenir aura une application importante.

Dans le cas de $s = 1$, le polynome P devient, pour $\mu = 1 - \nu$, non plus un polynome hypergéométrique de Gauss a une variable, ainsi que cela arrivait pour $s = \frac{1}{2}$, mais le carré d'un pareil polynome.

En effet :

La série hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle du deuxième ordre, son carré satisfait donc à une équation du troisième ordre qu'il est aisé de former. Si nous cher-

chons à identifier cette équation avec l'équation (24), nous verrons que l'identification est possible dans le cas de $s = 1$.

Ce résultat, dû d'abord à Tisserand, a été démontré par Stieltjes d'une façon fort élégante. Reprenons les équations (19) et faisons-y un changement de variables en posant

$$x = (1 - \rho)(1 - \rho'), \qquad y = \rho\rho';$$

nous verrons que, dans le cas de $s = 1$, les équations (19) se ramènent à deux équations linéaires du deuxième ordre, dont l'une ne contient que ρ, z, $\frac{dz}{d\rho}$, $\frac{d^2 z}{d\rho^2}$, tandis que l'autre ne contiendra que ρ', z, $\frac{dz}{d\rho'}$, $\frac{d^2 z}{d\rho'^2}$. On passe d'ailleurs d'une de ces équations à l'autre en accentuant partout la lettre ρ.

La première de ces équations est une équation différentielle linéaire ordinaire entre z et ρ, et l'on voit facilement que c'est précisément celle qui définit une série hypergéométrique ordinaire de Gauss. Si donc $z = F(\rho)$ est une solution de cette équation, on satisfera au système des deux équations en faisant

$$z = F(\rho)\, F(\rho').$$

On conclura de là que notre polynome hypergéométrique à deux variables est à un facteur constant près le produit de deux polynomes hypergéométriques à une variable, l'un en ρ, l'autre en ρ'.

Faisons maintenant

$$\mu + \nu = 1,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \rho';$$

d'où

$$y = \rho^2 = \nu^2, \qquad x = (1 - \rho)^2 = \mu^2; \qquad \rho = \nu,$$

il viendra

$$z = [F(\nu)]^2.$$

On voit que, quand on tiendra compte de la relation

$$\mu + \nu = 1,$$

notre polynome hypergéométrique à deux variables deviendra à un facteur constant près le carré d'un polynome hypergéométrique à une variable en ν. C. Q. F. D.

Je renverrai, pour le détail du calcul, au *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, t. I, p. 488 et suivantes.

269. Pour comprendre l'application possible du résultat précédent, reportons-nous au commencement du Chapitre; soit

$$F^{-s} = \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s} = (1 - 2\alpha\cos\sigma + \alpha^2)^{-s}.$$

Nous avons trouvé

$$F^{-s} = \sum P\alpha^m(-1)^{h+k} z^h w^k \mu^h w^k,$$

P étant le polynome hypergéométrique à deux variables que nous venons d'étudier. Dans le cas de $s = 1$, nous venons de voir que ce polynome est à un facteur constant près le carré d'un polynome hypergéométrique à une variable. Mais dans ce cas on a

$$F^{-s} = \frac{1}{(1-\alpha E^{i\sigma})(1-\alpha E^{-i\sigma})} = \frac{1}{E^{i\sigma} - E^{-i\sigma}}\left[\frac{E^{i\sigma}}{1-\alpha E^{i\sigma}} - \frac{E^{-i\sigma}}{1-\alpha E^{-i\sigma}}\right].$$

Il est aisé de développer le dernier membre suivant les puissances de α et l'on trouve

$$F^{-s} = \sum \alpha^m \frac{\sin(m+1)\sigma}{\sin\sigma}.$$

Donc le polynome P n'est autre chose que le coefficient de

$$(-z\mu)^h(-w\nu)^k$$

dans

$$\frac{\sin(m+1)\sigma}{\sin\sigma},$$

en supposant

$$2\cos\sigma = \mu(z + z^{-1}) + \nu(w + w^{-1}).$$

Ce coefficient s'exprime donc à l'aide des polynomes de Gauss (polynomes hypergéométriques à une variable).

Supposons maintenant s quelconque et revenons à la formule (1), elle peut s'écrire

$$(26) \qquad F^{-s} = b_s^0 + \sum b_s^{(k)} \frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin\sigma} - \sum b_s^{(k)} \frac{\sin(k-1)\sigma}{\sin\sigma}.$$

Or nous venons de voir que les expressions de la forme

$$\frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin\sigma}$$

pouvaient se développer à l'aide des polynomes de Gauss; il en est donc de même de F^{-s}.

270. On peut encore opérer d'une autre manière. Ecrivons

$$F^{-s} = (1+\alpha^2)^{-s}(1-2\beta\cos\sigma)^{-s},$$

où

$$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha^2},$$

il reste à développer

$$(1-2\beta\cos\sigma)^{-s}.$$

Il est évident que nous obtiendrons ce développement en nous reportant aux formules (2) et (3), en y remplaçant α par β, et en n'y conservant que les termes où $e = 0$.

Or, ces termes seront ceux où

$$m = h + k + p + q,$$

c'est-à-dire ceux où l'exposant de β (qui remplace α) est la somme de ceux de μ et de ν; il suffira donc de conserver, dans le polynome P, les termes du degré le plus élevé en μ et ν.

Nous avons trouvé plus haut

$$(27) \qquad F^{-s} = \sum P\alpha^m(-\mu z)^h(-\nu w)^k$$

et nous trouvons maintenant

$$(28) \qquad F^{-s} = (1+\alpha^2)^{-s}\sum P_0\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^m(-\mu z)^h(-\nu w)^k,$$

P_0 étant ce que devient P quand on n'y conserve que les termes du degré le plus élevé en μ et en ν; or, nous avons, à un facteur constant près,

$$P = \sum\frac{(a, p+q)(b, p+q)}{(c, p)(c', q)(1, p)(1, q)}\mu^{2p}\nu^{2q},$$

a, b, c, c' étant des constantes et b entier négatif. Il faut conserver

les termes du degré le plus élevé, c'est-à-dire faire

$$p+q=-b;$$

d'où

$$(b, p+q)=\pm(-b)!$$

Le facteur

$$(a, p+q)=(a, -b)$$

est également constant.

$$(c', q)=(c', -b-p)=(-1)^p \frac{\Gamma(1-c')}{\Gamma(1-c'+b+p)}$$
$$=(-1)^p \frac{\Gamma(1-c')}{\Gamma(1-c'+b)(1-c'+b, p)},$$

de sorte que (c', q) est en raison inverse de

$$(1-c'+b, p).$$

De même $(1, q)$ est en raison inverse de (b, p); nous avons donc, à un facteur constant près,

$$P_0 = \nu^{-2b} \sum \frac{(1-c'+b, p)(b, p)}{(c, p)(1, p)} \left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)^p,$$

c'est-à-dire que P_0 est égal à ν^{-2b} multiplié par un polynome hypergéométrique de Gauss en $\frac{\mu^2}{\nu^2} = \cot^4 \frac{J}{2}$.

Si nous rapprochons les relations (26), (27) et (28), nous pouvons résumer nos résultats comme il suit :

Nous voulons développer Δ^{-2s} et nous cherchons le coefficient d'une exponentielle quelconque

$$E^{i(pu+p'u')}.$$

Cette exponentielle peut être toujours mise sous la forme

$$z^h w^k = E^{i(h\xi+k\eta)};$$

ce coefficient étant divisible par $\mu^h \nu^k$ je l'appellerai

$$M \mu^h \nu^k;$$

M dépend de α, de μ et de ν. Je puis le développer :

1° Suivant les puissances de α, le coefficient de α^m est alors un

polynome hypergéométrique d'Appell à deux variables en $\cos^4 \frac{J}{2}$, $\sin^4 \frac{J}{2}$, qui se réduit à un polynome de Gauss en $\sin^2 \frac{J}{2}$ pour $s = \frac{1}{2}$.

2° Suivant les coefficients de Laplace $b_s^{(k)}$ qui sont des fonctions de α; le coefficient de $b_s^{(k)}$ est alors la différence des carrés de deux polynomes de Gauss en $\sin^2 \frac{J}{2}$;

3° Suivant les quantités

$$\frac{\alpha^m}{(1 + \alpha^2)^{m+s}},$$

le coefficient de chacune de ces quantités est alors égal à

$$\sin^{4(m-h-k)} \frac{J}{2}$$

multiplié par un polynome de Gauss en $\cot^4 \frac{J}{2}$.

Dans les trois cas le calcul des polynomes de Gauss peut être simplifié par les relations de récurrence dont j'ai parlé plus haut et que Gauss a démontrées dans le Tome III de ses *Œuvres complètes*, p. 130 et suivantes.

CHAPITRE XIX.

LES OPÉRATEURS DE NEWCOMB.

271. Nous allons maintenant supposer que les excentricités ne sont pas nulles et nous proposer de développer la partie principale de cette fonction perturbatrice suivant les puissances de ces excentricités. La meilleure méthode est celle de Newcomb qui repose sur l'emploi de certains *opérateurs* (*Astronomical Papers,* vol. 3).

Pour bien faire comprendre l'esprit de cette méthode, je vais prendre d'abord un exemple simple. Soit $F(x)$ une fonction quelconque de x; changeons x en

$$x + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 = x + \varepsilon$$

et cherchons à développer $F(x + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3)$ suivant les puissances croissantes de h; je n'aurai pour cela qu'à appliquer la formule de Taylor

$$F(x + \varepsilon) = \sum \frac{\varepsilon^m}{m!} F^{(m)},$$

à remplacer ε^m par $(\alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3)^m$, à développer cette expression et à ordonner par rapport à h. Le coefficient de h^k sera un polynome de la forme

$$b_1 F' + b_2 F'' + \ldots + b_k F^{(k)},$$

où les b sont des coefficients constants et les $F^{(k)}$ les dérivées successives de F; ceci peut s'écrire

$$(b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_k D^k) F,$$

où D^k est l'indice d'une différentiation répétée k fois. Cette expression

$$b_1 D + \ldots + b_k D^k$$

sera ce qu'on appelle un *opérateur;* c'est un symbole d'opération. Si j'appelle Π_k cet opérateur, je pourrai écrire

$$F(x+\varepsilon) = F(x) + h\Pi_1 F + h^2\Pi_2 F + \ldots. \tag{1}$$

Cela nous indique déjà l'esprit de la méthode; mais nous allons voir comment on peut former ces opérateurs. A cet effet, je fais

$$F(x) = E^{\lambda x}:$$

d'où

$$F(x+\varepsilon) = E^{\lambda x}E^{\lambda\varepsilon},$$
$$\Pi_k E^{\lambda x} = E^{\lambda x}(b_1\lambda + \ldots + b_k\lambda^k).$$

En faisant donc $F(x) = F^{\lambda x}$ dans la formule (1), nous trouvons

$$E^{\lambda\varepsilon} = \sum h^k \Pi_k$$

en convenant de remplacer D^m par λ^m et de faire $\Pi_0 = 1$.

En d'autres termes, on obtiendra l'opérateur Π_k en développant $E^{D\varepsilon}$ suivant les puissances de h comme si D était une quantité ordinaire et en conservant le coefficient de h^k.

Nous pourrions donc regarder $E^{D\varepsilon}$ comme un opérateur et écrire

$$F(x+\varepsilon) = E^{D\varepsilon}(F). \tag{2}$$

Envisageons maintenant une fonction de deux variables $F(x, y)$ et cherchons à développer $F(x+\varepsilon, y+\varepsilon')$ avec

$$\varepsilon = \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \ldots,$$
$$\varepsilon' = \alpha'_1 h + \alpha'_2 h^2 + \alpha'_3 h^3 + \ldots.$$

Nous pourrons opérer de la même manière, nous développerons $F(x+\varepsilon, y+\varepsilon')$ suivant les puissances de ε et de ε' par la formule de Taylor; nous développerons ensuite $\varepsilon^m\varepsilon'^n$ suivant les puissances de h et nous ordonnerons par rapport à h, nous trouverons ainsi

$$F(x+\varepsilon, y+\varepsilon') = \sum h^k \Pi_k F, \tag{1 bis}$$

où Π_k sera un opérateur qui prendra la forme d'un polynome entier en D et en D', avec cette convention que

$$D^p D'^q$$

est le signe d'une opération qui consiste à différentier p fois par rapport à x et q fois par rapport à y.

Pour déterminer ce polynome Π_k, il suffira de prendre pour $F(x, y)$ la fonction particulière $E^{(\lambda x + \mu y)}$, ce qui, par une analyse toute pareille à celle qui précède, donnera

$$E^{\lambda\varepsilon+\mu\varepsilon'} = \sum h^k \Pi_k$$

en remplaçant D et D' par λ et μ dans le second membre.

Nous pourrons donc écrire symboliquement

$$(2\ bis) \qquad F(x+\varepsilon, y+\varepsilon') = E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}(F)$$

en regardant $E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}$ comme un opérateur.

272. On pourrait supposer que ε et ε' dépendent, non d'une seule variable h, mais de deux variables h et h' ou d'un plus grand nombre, et qu'on veut développer $F(x+\varepsilon, y+\varepsilon')$ suivant les puissances de h et de h'; il n'y aurait rien à changer à ce qui précède.

On retrouverait la formule (2 *bis*) sans aucune modification; quant à la formule (1 *bis*) il faudrait l'écrire comme il suit :

$$F(x+\varepsilon, y+\varepsilon') = \sum h^i h'^j \Pi_{ij} F.$$

Examinons de plus près l'opérateur Π_{ij}, je dis qu'il y aura un cas où l'on aura

$$\Pi_{ij} = \Pi_{i0} \Pi_{0j},$$

de sorte que notre opérateur à double indice pourra être regardé comme le produit de deux opérateurs à simple indice. C'est le cas où ε est égal à une fonction de h seulement, plus une fonction de h' seulement, et où il en est de même de ε'. Supposons, en effet,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$
$$\varepsilon' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2,$$

ε_1 et ε'_1 dépendant de h seulement, tandis que ε_2 et ε'_2 dépendent de h' seulement. On aura alors

$$E^{D\varepsilon+D'\varepsilon} = E^{D\varepsilon_1+D'\varepsilon'_1} E^{D\varepsilon_2+D'\varepsilon'_2},$$

de telle façon que le coefficient de $h^i h'^j$ dans le développement de $E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}$, c'est-à-dire Π_{ij}, sera le produit du coefficient de h^i dans le développement de $E^{D\varepsilon_1+D'\varepsilon'_1}$, c'est-à-dire de Π_{i0} par le coefficient de h'^j dans le développement de $E^{D\varepsilon_2+D'\varepsilon'_2}$, c'est-à-dire par Π_{0j}.

Ce résultat s'étendrait évidemment au cas où le nombre des variables serait plus grand.

Remarquons que d'après leur définition même nos opérateurs sont *permutables,* puisque les opérateurs simples D et D' le sont eux-mêmes.

273. Appliquons ceci au développement de $\frac{1}{\Delta}$.

Nous prendrons pour origine des longitudes dans les plans des deux orbites la ligne commune des nœuds; la longitude moyenne est égale à l'anomalie moyenne plus la longitude du périhélie (qui ici se réduit à la distance du périhélie au nœud). Mais, au lieu de prendre pour variables la longitude moyenne et la longitude du périhélie, ou bien encore l'anomalie moyenne et la longitude du périhélie comme on le fait d'ordinaire, nous pouvons évidemment prendre la longitude moyenne et l'anomalie moyenne.

Nous considérerons donc $\frac{1}{\Delta}$ comme une fonction de 9 variables qui seront, outre l'inclinaison mutuelle des orbites : 1° les logarithmes des grands axes; 2° les excentricités ; 3° les longitudes moyennes; 4° les anomalies moyennes.

Nous aurons donc, après développement,

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A e^m e'^{m'} E^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')} \tag{3}$$

où m, m', p, p', q, q' sont des entiers, où l et l' sont les anomalies moyennes, ζ et ζ' les longitudes moyennes, et où A est une fonction de l'inclinaison et des logarithmes des grands axes.

Si les excentricités étaient nulles, les longitudes moyennes se confondraient avec les longitudes vraies, les grands axes avec les rayons vecteurs; et la distance ne dépendrait plus des anomalies moyennes l et l' (mais seulement des grands axes et de ζ, ζ'). Donc dans notre développement (3) disparaîtront tous les termes dépendant de e, e', l, l', c'est-à-dire tous ceux où les entiers m, m', q, q' ne sont pas nuls.

Mais, dans le cas des excentricités nulles, le développement (3) est connu, c'est celui que nous avons obtenu dans le Chapitre précédent; et il s'agit d'en déduire le développement dans le cas général.

Or il est clair que Δ ne peut dépendre que des longitudes vraies et des rayons vecteurs. On obtiendra donc le développement dans le cas général, en partant du développement pour les excentricités nulles et en y remplaçant les logarithmes des grands axes

$$\log a, \quad \log a'$$

et les longitudes moyennes

$$\zeta, \quad \zeta'$$

par les logarithmes des rayons vecteurs

$$\log r = \log a + \log\frac{r}{a}, \qquad \log r' = \log a' + \log\frac{r'}{a'}$$

et les longitudes vraies

$$v = \zeta + (v - \zeta), \qquad v' = \zeta' + (v' - \zeta').$$

Il suffit d'appliquer les principes du numéro précédent, en faisant jouer à $\frac{1}{\Delta}$ le rôle de $F(x, y)$, à

$$\log a, \quad \log a', \quad \zeta, \quad \zeta',$$

le rôle de x et y, à

$$\log r, \quad \log r', \quad v, \quad v',$$

celui de $x + \varepsilon$, $y + \varepsilon'$, et par conséquent à

$$\log\frac{r}{a}, \quad \log\frac{r'}{a'}, \quad v - \zeta, \quad v' - \zeta' \tag{4}$$

celui de ε et ε'. En effet, ces quatre quantités (4) sont développables suivant les puissances de

$$e\mathrm{E}^{il}, \quad e\mathrm{E}^{-il}, \quad e'\mathrm{E}^{il'}, \quad e'\mathrm{E}^{-il'}$$

qui vont jouer le rôle de h et h' et ne dépendent d'ailleurs pas de a, a', ζ, ζ'.

Soit donc F le développement pour les excentricités nulles et

F_1 le développement dans le cas général; soient

$$D, \quad D_1, \quad D', \quad D'_1$$

des indices de différentiation se rapportant à

$$\log a, \quad \zeta, \quad \log a', \quad \zeta';$$

nous aurons pour l'expression analogue à $D\varepsilon + D'\varepsilon'$

$$D \log \frac{r}{a} + D_1(v - \zeta) + D' \log \frac{r'}{a'} + D'_1(v' - \zeta'),$$

de sorte qu'on aura symboliquement par la formule (2 *bis*) :

$$(5) \qquad F_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{D_1(v-\zeta)+D'_1(v'-\zeta')} F.$$

L'expression

$$(6) \qquad \left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{D_1(v-\zeta)+D'_1(v'-\zeta')}$$

peut se développer suivant les puissances de

$$e E^{\pm il}, \quad e' E^{\pm il'},$$

en faisant le calcul comme si D, D', D_1, D'_1 étaient des quantités ordinaires; les coefficients du développement sont alors des polynomes entiers par rapport à D, D', D_1, D'_1. Soit alors

$$\sum \Pi (e E^{il})^{\alpha} (e E^{-il})^{\beta} (e' E^{il'})^{\alpha'} (e' E^{-il'})^{\beta'}$$

le développement ainsi obtenu; ce que je puis écrire :

$$\sum \Pi e^m e'^{m'} E^{i(ql+q'l')}$$

en écrivant m, m', q, q' au lieu de $\alpha + \beta$, $\alpha' + \beta'$, $\alpha - \beta$, $\alpha - \beta'$. Le coefficient Π sera un opérateur qui dépend des quatre nombres m, m', q, q', ce que nous mettrons en évidence en écrivant

$$\Pi_{qq'}^{mm'}.$$

Nous aurons alors

$$F_1 = \sum e^m e'^{m'} E^{i(ql+q'l')} \Pi_{qq'}^{mm'} F.$$

Maintenant F c'est le développement dans le cas des excentricités nulles, tel qu'il a été obtenu au Chapitre précédent. Soit

$$\sum \mathrm{A}\,\mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta')}$$

ce développement. Nous sommes conduits à calculer

$$\Pi_{qq'}^{mm'}[\mathrm{A}\,\mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta')}];$$

pour appliquer cet opérateur à la fonction $\mathrm{AE}^{i(p\zeta+p'\zeta')}$ il faut faire subir à cette fonction diverses différentiations par rapport à

$$\log a, \quad \log a', \quad \zeta, \quad \zeta';$$

mais, pour la différentier par rapport à ζ ou à ζ', il suffit évidemment de la multiplier par ip ou ip'. Nous pouvons donc l'écrire

$$\Pi_{qq'}^{mm'}[\mathrm{AE}^{i(p\zeta+p'\zeta')}] = \mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta')}\,\Pi_{qq'}^{mm'}(\mathrm{A}).$$

Dans le premier membre $\Pi_{qq'}^{mm'}$ a le même sens que plus haut; c'est un polynome entier par rapport à D, D', D_1, D'_1; dans le second membre, c'est le même polynome, mais où les symboles D_1, D'_1 sont remplacés par les quantités ip et ip'. Il ne contient donc plus que deux symboles d'opération D et D' et il est appliqué à la fonction A qui ne dépend plus que de $\log a$ et $\log a'$.

Il reste finalement

$$\frac{1}{\Delta} = \mathrm{F}_1 = \sum e^m e'^{m'}\,\mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')}\,\Pi_{qq'}^{mm'}\,\mathrm{A}.$$

Le coefficient du terme en

$$e^m e'^{m'}\mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')}$$

est donc

$$\Pi_{qq'}^{mm'}\mathrm{A},$$

A désignant le coefficient du terme en

$$\mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

lequel, ne dépendant pas des excentricités, a été déterminé au Chapitre précédent.

274. Nous avons vu au n° 240 qu'il est aisé de passer du

développement procédant suivant les anomalies excentriques au développement procédant suivant les anomalies moyennes. Nous pouvons donc nous proposer, au lieu de former *directement* ce dernier développement, d'y parvenir indirectement et par l'intermédiaire du premier. C'est ce qu'a fait M. Newcomb.

A cet effet nous prendrons comme variables l'inclinaison mutuelle des orbites et, pour chaque planète, le logarithme du grand axe, l'excentricité, l'anomalie excentrique u et ce qu'on pourrait appeler la *longitude excentrique*, c'est-à-dire l'anomalie excentrique, plus la longitude du périhélie, toujours comptée à partir du nœud. Nous chercherons alors à former le développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \mathrm{A} e^m e'^{m'} \mathrm{E}^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')} \tag{3 bis}$$

où u et u' désignent les deux anomalies excentriques, η et η' les deux longitudes excentriques.

275. M. Newcomb introduit encore une autre simplification en posant

$$e = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \qquad e' = \frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Il cherche ensuite à développer, non plus suivant les puissances de e et e', mais suivant celles de ε et ε' de façon à obtenir le développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \mathrm{A} \varepsilon^m \varepsilon'^{m'} \mathrm{E}^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')}. \tag{3 ter}$$

Il est clair qu'il est aisé de passer du développement (3 *ter*) au développement (3 *bis*) et de là au développement (3).

Si nous posons

$$e = \sin\varphi,$$

il vient

$$\varepsilon = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Remarquons en passant que les éléments *canoniques* ξ_1 et η_1 du n° 58 sont proportionnels à $\sin\frac{\varphi}{2}$.

276. Il y a des termes des développements (3), (3 *bis*) et

(3 *ter*) qui sont connus ; ce sont ceux où

$$m = m' = q = q' = 0,$$

les seuls qui subsistent quand les excentricités sont nulles; nous les avons déterminés au Chapitre précédent. Ils sont d'ailleurs les mêmes pour les trois développements, sauf la substitution de η et η' à ζ et ζ'.

De ces termes connus, il s'agit de déduire les autres; et, pour cela, que nous adoptions les variables du n° 274 ou celles du n° 275, il nous suffira d'opérer tout à fait de la même manière qu'au n° 273; on n'aura qu'à faire jouer à

$$e, \quad e', \quad \eta, \quad \eta', \quad u, \quad u'$$

ou à

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \eta, \quad \eta', \quad u, \quad u'$$

le rôle que jouaient au n° 273 les quantités

$$e, \quad e', \quad \zeta, \quad \zeta', \quad l, \quad l'.$$

On trouvera comme au n° 273 que le coefficient de

$$e^m e'^{m'} E^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')}$$

ou celui de

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')}$$

sera

$$\Pi_{qq'}^{mm'} A,$$

A désignant le coefficient du terme en

$$E^{i(p\eta+p'\eta')},$$

tandis que $\Pi_{qq'}^{mm'}$ est un opérateur qui n'est autre chose que le coefficient de

$$e^m e'^{m'} E^{i(qu+q'u')}$$

ou de

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(qu+q'u')}$$

dans le développement de l'expression symbolique

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{D} \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{ip(v-\eta)+ip'(v'-\eta')}, \tag{7}$$

suivant les puissances de $e E^{\pm iu}$, $e' E^{\pm iu'}$ ou celles de $\varepsilon E^{\pm iu}$, $\varepsilon' E^{\pm iu'}$.

On remarquera que, dans l'expression (7), j'ai remplacé D_1 et D'_1

par ip et ip', ainsi que nous avons démontré qu'on devait le faire à la fin du n° 273.

Seulement les opérateurs Π sont beaucoup plus simples quand on adopte les variables du n° 274 et surtout quand on adopte celles du n° 275.

277. Il y a d'abord une remarque que nous devons faire et qui restera vraie que l'on adopte les variables des n^{os} 273, 274 ou 275. L'expression symbolique (6) est le produit de deux autres

$$(8)\qquad \left(\frac{r}{a}\right)^{D} E^{D_1(v-\zeta)}, \qquad \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{D'_1(v'-\zeta')}.$$

Il en est de même de l'expression (7), à la condition bien entendu de changer ζ et ζ' en η et η'; quant à D_1 et D'_1 ils peuvent être remplacés par ip et ip', ainsi que nous l'avons dit.

La première des deux expressions (8) ne dépend que de $eE^{\pm il}$, ou de $eE^{\pm iu}$, ou de $\varepsilon E^{\pm iu}$, la seconde au contraire ne dépend que de $e'E^{\pm il'}$ ou de $e'E^{\pm iu'}$, ou de $\varepsilon' E^{\pm iu'}$.

Appliquant en conséquence une remarque faite au n° 272, nous voyons que l'opérateur Π à quatre indices peut être considéré comme le produit de deux opérateurs à deux indices

$$(9)\qquad \Pi_{qq'}^{mm'} = \Pi_{q0}^{m0}\,\Pi_{0q'}^{0m'}.$$

Le premier facteur dépend seulement de D et de D_1, c'est-à-dire de D et de p; le second de D' et de D'_1, c'est-à-dire de D' et de p'. Mais de plus nous avons une relation entre D et D'. En effet,

$$DF = \frac{dF}{d\log a} = a\frac{dF}{da}$$

et de même

$$D'F = a'\frac{dF}{da'}.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\Delta}$ est homogène et de degré -1 en a et en a'. Cette propriété n'est altérée ni par l'opération D, ni par l'opération D', elle appartiendra donc à toutes les fonctions auxquelles nous aurons à appliquer soit l'opérateur D, soit l'opérateur D'; de sorte qu'on aura

$$a\frac{dF}{da} + a'\frac{dF}{da'} = -F,$$

c'est-à-dire

$$D + D' = -1.$$

Cela nous permet d'exprimer D' en fonction de D de sorte que nos opérateurs Π seront des polynomes entiers par rapport à l'opérateur simple D et par rapport aux entiers p et p'.

278. On rencontre de plus grandes simplifications encore quand on adopte les variables du n° 275. On a alors, en effet,

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u = \frac{1 - 2\varepsilon\cos u + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2},$$

d'où

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{D} = (1 + \varepsilon^2)^{-D}(1 - \varepsilon E^{iu})^{D}(1 - \varepsilon E^{-iu})^{D}.$$

Reste le facteur

$$E^{D_1(v - \eta)}.$$

On observera que, en vertu de l'équation des aires,

$$r^2\frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1 - e^2},$$

$$\frac{r^2}{a^2}\frac{dv}{dl} = \sqrt{1 - e^2},$$

d'autre part

$$\frac{dl}{du} = 1 - e\cos u = \frac{r}{a},$$

d'où

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos u} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon\cos u + \varepsilon^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon E^{iu}} + \frac{\varepsilon E^{-iu}}{1 - \varepsilon E^{-iu}},$$

$$\frac{dv}{du} = 1 + \sum \varepsilon^m E^{miu} + \sum \varepsilon^m E^{-miu}$$

et en intégrant

$$v = \eta + \sum \frac{\varepsilon^m E^{miu}}{mi} - \sum \frac{\varepsilon^m E^{-miu}}{mi}.$$

On voit que

$$E^{D_1(v - \eta)}$$

se décomposera en deux facteurs, le premier dépendant seulement de εE^{iu} comme le deuxième facteur de $\left(\frac{r}{a}\right)^{D}$, le deuxième dépendant seulement de εE^{-iu} comme le troisième facteur de $\left(\frac{r}{a}\right)^{D}$. Mais

il vaut mieux opérer comme il suit. Considérons l'expression

$$\frac{r}{a}E^{iv}.$$

Si la longitude du périhélie est, pour un instant, supposée nulle, elle est égale à

$$\cos u - e + i\sin u\sqrt{1-e^2} = \frac{E^{iu}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 E^{-iu})}{1+\varepsilon^2}$$

ou à

$$\frac{E^{iu}}{1+\varepsilon^2}(1-\varepsilon E^{-iu})^2.$$

On aura donc, quelle que soit la longitude du périhélie,

$$\frac{r}{a}E^{i(v-\eta)} = \frac{(1-\varepsilon E^{-iu})^2}{1+\varepsilon''}.$$

Reprenons l'expression symbolique

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{D} E^{Di(v-\eta)} = \left(\frac{r}{a}\right)^{D-p} E^{ip(v-\eta)}\left(\frac{r}{a}\right)^{p},$$

elle pourra s'écrire

$$(1+\varepsilon^2)^{-D}(1-\varepsilon E^{iu})^{D-p}(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p}.$$

Or, on a par la formule du binome

$$(1+\varepsilon^2)^{D} = \sum \frac{(D-k+1, k)}{k!}\varepsilon^{2k},$$

$$(1-\varepsilon E^{iu})^{D-p} = \sum \frac{(D-p-k'+1, k')}{k'!}(-\varepsilon)^{k'}E^{ik'u},$$

$$(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p} = \sum \frac{(D+p-k''+1, k'')}{k''!}(-\varepsilon)^{k''}E^{-ik''u},$$

la notation (D, k) ayant même sens qu'au Chapitre précédent. Ces formules nous donnent immédiatement nos opérateurs Π. Si, en effet, nous tenons compte seulement d'abord des deux derniers facteurs et que nous posions

$$(1-\varepsilon E^{iu})^{D+p}(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p} = \sum H_q^m \varepsilon^m E^{iqu},$$

il viendra

$$\mathrm{H}_q^m=(-1)^m \frac{\left(\mathrm{D}-p+1-\frac{m+q}{2}, \frac{m+q}{2}\right)\left(\mathrm{D}+p+1-\frac{m-q}{2}, \frac{m+q}{2}\right)}{\frac{m+q}{2}!\,\frac{m-q}{2}!}$$

et ensuite

$$\Pi_{q0}^{m0} = \mathrm{H}_q^m + \frac{(\mathrm{D}, 1)}{1!}\mathrm{H}_q^{m-2} + \frac{(\mathrm{D}-1, 2)}{2!}\mathrm{H}_q^{m-4} + \ldots,$$

ou en mettant en évidence le terme général

$$\Pi_{q0}^{m0} = \sum \frac{(\mathrm{D}-k+1, k)}{k!}\mathrm{H}_q^{m-2k}.$$

On voit que tous nos opérateurs se présentent sous la forme de polynomes entiers en D.

M. Chessin préfère, au lieu de passer par les intermédiaires des développements (3 *ter*) et (3 *bis*), former directement les opérateurs qui donnent le développement (3). Ces opérateurs sont encore des polynomes en D, mais dont les coefficients sont beaucoups plus compliqués; mais M. Chessin a donné dans l'*Astronomical Journal* des relations de récurrence qui en facilitent beaucoup le calcul.

279. Une fois les opérateurs formés, il est aisé d'obtenir les développements eux-mêmes. Au Chapitre précédent, nous avons développé $\frac{1}{\Delta}$ en supposant les excentricités nulles et cela sous plusieurs formes différentes. Nous avons trouvé d'abord

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \mathrm{B}\frac{a^m}{a'^{m+1}} \mathrm{E}^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

B étant égal à un polynome de Gauss en $\nu = \sin^2\frac{\mathrm{J}}{2}$, multiplié par un facteur numérique et par des puissances de $\mu = \cos^2\frac{\mathrm{J}}{2}$ et $\nu = \sin^2\frac{\mathrm{J}}{2}$. C'est la formule (27) du Chapitre précédent. Il s'agit alors de voir ce que c'est que

$$\mathrm{D}\frac{a^m}{a'^{m+1}}, \qquad \mathrm{D}'\frac{a^m}{a'^{m+1}},$$

on trouve

$$m\frac{a^m}{a'^{m+1}}, \qquad -(m+1)\frac{a^m}{a'^{m+1}}.$$

Il suffit donc de remplacer D, D', D_1, D'_1 par m, $-(m+1)$, ip, ip'; notre expression (6) devient tout simplement

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-(m+1)} E^{ip(v-\zeta)+ip'(v'-\zeta')},$$

et le développement (3) est ramené au suivant :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B \frac{r^m}{r'^{m+1}} E^{i(pv+p'v')},$$

formule d'ailleurs évidente sans tant de détours.

Nous avons trouvé aussi une autre forme de développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)} E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

où B est égal à $\mu^{\frac{p+p'}{2}} \nu^{\frac{p-p'}{2}}$, multiplié par la différence des carrés de deux polynomes de Gauss. C'est la formule (26) du Chapitre précédent. Cette fois l'emploi des opérateurs se justifie. Il faut appliquer nos opérateurs Π à

$$\frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)},$$

et pour cela il faut savoir appliquer à cette expression l'opérateur simple D une ou plusieurs fois; or, on trouve

$$D\frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{\alpha}{a'} \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(k)}}{d\alpha},$$

et les expressions

$$D^m \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$$

s'exprimeraient de même très simplement à l'aide des dérivées supérieures du coefficient de Laplace $b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$. Or nous avons appris au n° 250 à calculer par des relations de récurrence les dérivées successives des coefficients de Laplace. Le problème peut donc être considéré comme entièrement résolu.

CHAPITRE XX.

CONVERGENCE DES SÉRIES.

280. Nous avons vu au n° 240 que la partie principale de la fonction perturbatrice $\frac{1}{\Delta}$ pouvait se développer, soit sous la forme

$$\sum B_{mm'} E^{i(mu+m'u')},$$

soit sous la forme

$$\sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

et au n° 242 que les coefficients de ces deux séries pouvaient s'exprimer par des intégrales définies

$$(1) \qquad -4\pi^2 B_{mm'} = \int\int \frac{dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}$$

et

$$(2) \qquad -4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{Q E^{\Omega}\, dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

où

$$x = E^{iu}, \qquad y = E^{iu'}, \qquad R = x^2 y^2 \Delta^2,$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right]$$

$$2\Omega = me\left(x - \frac{1}{x}\right) + m'e'\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

et où l'intégration doit être étendue, tant par rapport à x que par rapport à y, le long d'une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

Ces coefficients $B_{mm'}$, $A_{mm'}$ sont des fonctions de l'inclinaison, des excentricités, des longitudes des périhélies comptées à partir du nœud et enfin des grands axes. Nous avons appris dans les deux

Chapitres précédents à développer ces fonctions suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons et il s'agit maintenant de savoir quelles sont les conditions de convergence de ces séries.

Nous n'aurons pour cela qu'à appliquer la méthode de Cauchy et à chercher les points singuliers de ces fonctions.

281. Nous sommes donc ainsi amenés à expliquer comment on trouve les points singuliers des fonctions représentées par des intégrales définies et d'abord par des intégrales définies simples.

Soit

$$\int R(x, z)\, dx,$$

une intégrale définie prise par rapport à x le long d'un certain contour : cette intégrale sera alors fonction du paramètre z.

Pour que pour cette fonction une valeur de z soit critique, il faut d'abord que l'un des points singuliers de $R(x, z)$, considérée comme fonction de x, se trouve sur le contour d'intégration.

Mais, comme on peut déformer ce contour d'une manière continue, on peut le faire fuir devant le point singulier, et l'on n'est arrêté que lorsque ce contour se trouve pris entre deux points singuliers et ne peut plus fuir.

On obtiendra donc toutes les valeurs critiques de z, en exprimant que deux des points singuliers de R, considérée comme fonction de x, se confondent. Mais toutes les valeurs critiques ainsi trouvées ne conviennent pas ; il faut, en effet, que les deux points singuliers qui se confondent ainsi soient, avant de s'être confondus, de part et d'autre du contour ; c'est seulement à cette condition que le contour, pris entre deux feux, ne peut plus fuir.

Soit donc

$$\varphi(x, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction $R(x, z)$ présente une singularité, et supposons qu'elle se décompose en un certain nombre d'équations indépendantes, trois par exemple :

$$\varphi_1(x, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, z) = 0, \qquad \varphi_3(x. z) = 0.$$

On obtiendra les valeurs critiques de z de l'une des deux manières suivantes :

1° En annulant deux des trois fonctions φ_1, φ_2, φ_3, et en écri-

vant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_2(x, z) = 0.$$

En éliminant x et résolvant par rapport à z, on aura une valeur critique de z.

2° En annulant l'une de ces trois fonctions et sa dérivée et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

On aura encore une valeur critique de z, en éliminant x et résolvant par rapport à z.

282. Considérons maintenant une intégrale double

$$\int\int R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

envisagée comme fonction du paramètre z et étendue à un champ quelconque.

Le cas particulier le plus simple est celui où l'on doit intégrer par rapport à x, le long d'un contour fixe indépendant de y, et par rapport à y, le long d'un contour fixe indépendant de x. C'est précisément ce cas particulier simple que l'on rencontre en ce qui concerne les intégrales (1) et (2).

Ici, en effet, les deux contours C_x et C_y indépendants, le premier de y, le second de x, sont deux circonférences de centre zéro et de rayon 1, le premier dans le plan des x, le second dans le plan des y.

Soient donc C_x et C_y les deux contours fixes d'intégration par rapport à x et à y. Soit

$$\theta(y, z) = \int R(x, y, z)\, dx,$$

l'intégrale étant prise le long de C_x.

Notre intégrale double sera alors

$$\eta(z) = \int \theta(y, z)\, dy,$$

l'intégrale étant prise le long de C_y.

Nous n'avons plus qu'à appliquer les principes du numéro précédent aux deux intégrales simples

$$\int R\, dx, \qquad \int \theta\, dy.$$

Nous devons observer toutefois que nous risquons de n'obtenir ainsi que des conditions nécessaires et pas suffisantes. En effet, nous avons observé plus haut que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas.

On obtiendra d'autres conditions également nécessaires en changeant de coordonnées, et en particulier en permutant x et y, c'est-à-dire en intervertissant l'ordre des intégrations.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction R a une singularité.

Décomposons cette équation en équations irréductibles

$$(3) \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

On obtiendra les singularités de la fonction $\theta(y, z)$:

1° En annulant deux des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

2° En annulant une des trois fonctions et sa dérivée et écrivant

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

Ces singularités peuvent ne pas toutes convenir, car il peut arriver que les deux points singuliers, qui se confondent, soient d'un même côté du contour d'intégration.

Pour avoir les singularités de $\eta(z)$, considérons maintenant celles de $\theta(y, z)$, qui nous seront données par des systèmes d'équations de l'une des deux formes

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0,$$

et cherchons les conditions pour que deux de ces singularités se confondent.

Si nous considérons z comme un paramètre, x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, les équations (3) représentent un certain nombre de courbes planes.

Les singularités de θ données par un système d'équations de la forme

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

correspondront aux points d'intersection de ces courbes; celles qui seront données par un système de la forme

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

correspondront aux points de contact d'une de ces courbes avec une tangente parallèle à l'axe des y.

Pour que deux de ces singularités se confondent, il faut :

1° Ou bien que trois des fonctions φ s'annulent à la fois

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0;$$

2° Ou bien que l'on ait à la fois

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \qquad \varphi_2 = 0;$$

mais, comme la condition ne doit pas dépendre du choix des coordonnées, et qu'en particulier elle doit subsister quand on permute x et y, on devra avoir aussi

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ce qui veut dire que l'une des courbes (3) aura un point double;

3° Ou bien que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre;

4° Ou enfin que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre. Mais cela entraîne : ou bien

$$\frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ou bien $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0$; mais, comme la condition ne doit pas changer quand on permute x et y, on devra avoir dans tous les cas

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0.$$

En résumé, les valeurs critiques de z sont :

1° Celles pour lesquelles trois des courbes (3) se coupent en un même point;

2° Celles pour lesquelles deux de ces courbes sont tangentes;

3° Celles pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Seulement toutes ces valeurs peuvent ne pas convenir, car les deux singularités qui se confondent peuvent être situées d'un même côté du contour d'intégration.

Et d'ailleurs nous avons vu que nos conditions ne sont que nécessaires.

283. Appliquons ces principes aux intégrales (1) et (2). La fonction sous le signe $\int$ sera holomorphe tant par rapport à x et y que par rapport aux excentricités e et e' et à $\sin\frac{J}{2}$, J étant l'inclinaison.

Il y aura exception seulement :

1° Si $e = 1$ et $e' = 1$ (condition où x et y n'interviennent pas et sur laquelle nous reviendrons);

2° Si x ou y est nul ou infini;

3° Si Δ s'annule, c'est-à-dire si

$$R = \Delta x^2 y^2,$$

qui est un polynome entier du sixième ordre en x, y, est égal à zéro.

Cela est vrai quels que soient les entiers m et m'; cela est vrai

d'ailleurs aussi bien de l'intégrale (2) que de l'intégrale (1), car

$$Q \quad \text{et} \quad E^{\Omega}$$

ne cessent d'être holomorphes que si x ou y est nul ou infini.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3), c'est-à-dire celles dont les équations expriment que la fonction sous le signe $\int$ cesse d'être holomorphe, se réduisent donc, en ce qui concerne les intégrales (1) et (2), aux quatre droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty \tag{4}$$

et à la courbe du sixième degré

$$R = 0. \tag{4 bis}$$

Cette dernière, dans le cas où l'inclinaison est nulle, se décompose en deux courbes du troisième degré

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0. \tag{4 ter}$$

Pour trouver les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons, nous devons donc chercher celles pour lesquelles trois des courbes (4) ou (4 *bis*) se coupent, ou pour lesquelles deux de ces courbes se touchent, ou pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Mais, comme ces courbes sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2), les valeurs pour lesquelles une de ces trois circonstances se présentera seront également les mêmes pour les intégrales (1) et (2).

Ainsi les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons sont les mêmes pour les deux intégrales (1) et (2).

Mais une question pourrait encore se poser; nous avons vu que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas. Ne pourrait-il se faire qu'une de ces valeurs convînt à (1) sans convenir à (2) ou inversement.

La réponse doit être négative. Comment se fait-il, en effet, que certaines valeurs critiques conviennent et que d'autres ne conviennent pas? Pour nous en rendre compte, faisons varier d'une manière continue l'un de nos paramètres, par exemple l'excentricité e, et, en même temps, déformons d'une manière continue les contours d'intégration. Nous devons diriger cette déformation de

telle sorte qu'aucune des valeurs singulières définies par les équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Si, e variant d'une manière continue depuis zéro jusqu'à e_0, on peut s'arranger de façon que cette condition ne cesse jamais d'être remplie, c'est que e_0 n'est pas une véritable valeur critique; e_0 ne convient pas; si, au contraire, il est impossible de s'arranger pour que la condition soit remplie (parce que, comme je l'expliquais plus haut, le contour d'intégration se trouve pris entre deux points singuliers), c'est que e_0 est une véritable valeur critique; e_0 convient.

Faisons donc varier e de zéro à e_0 et, en même temps, déformons nos contours d'intégration en partant des contours initiaux

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1$$

qui sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2); si e_0 ne convient pas à l'intégrale (1), c'est que nous pouvons déformer nos contours de telle façon qu'à aucun moment une des valeurs singulières satisfaisant aux équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Mais, si cette condition ne cesse jamais d'être remplie en ce qui concerne l'intégrale (1), elle ne cessera jamais non plus de l'être en ce qui concerne l'intégrale (2), puisque les équations (4) et (4 *bis*) qui définissent les valeurs singulières sont les mêmes pour (1) et pour (2). Donc e_0 ne conviendra pas non plus à l'intégrale (2). C. Q. F. D.

Voici donc un premier résultat.

Les coefficients $B_{m,m'}$ *du développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, ainsi que les coefficients* $A_{m,m'}$ *du développement suivant les anomalies moyennes sont eux-mêmes développables suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons.*

Les limites de convergence de ces nouveaux développements sont les mêmes pour les coefficients $B_{m'm'}$ *et pour les coefficients* $A_{m'm'}$*; elles sont les mêmes pour tous ces coefficients quels que soient les entiers* m *et* m'.

284. Nous examinerons spécialement le cas où les excentricités sont nulles et celui où l'inclinaison est nulle.

Dans le cas où les excentricités sont nulles, il n'y a plus à faire de distinction entre les anomalies excentriques et les anomalies moyennes, de sorte que

$$Q = 1, \qquad \Omega = 0,$$

$$A_{mm'} = B_{mm'} = \frac{-1}{4\pi^2}\int\int \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

Cette dernière intégrale peut encore s'écrire

$$\int\int \frac{dx\,dy}{x^{m+1} y^{m'+1} \Delta},$$

ou bien en posant comme au n° 259

$$z = \frac{x}{y}, \qquad w = xy,$$

nous pouvons encore l'écrire

$$\frac{1}{2}\int\int \frac{dz\,dw}{x^m y^{m'+2} \Delta} = \frac{1}{2}\int\int \frac{dz\,dw}{z^p w^{p'} \Delta},$$

en posant

$$p = \frac{m - m' - 2}{2}, \qquad p' = \frac{m + m' + 2}{2}.$$

Quand x et y décrivent chacun dans leur plan des circonférences de rayon 1, z et w font de même; mais, à chaque couple de valeurs de z et w situées sur ces circonférences, correspondent *deux* couples de valeurs de x et de y; on obtient donc deux fois l'intégrale, de sorte que, finalement, nous pourrons écrire

$$(5) \qquad -4\pi^2 A = \int\int \frac{dz\,dw}{z^p w^{p'} \Delta},$$

l'intégration étant étendue, tant pour z que pour w, à une circonférence de rayon 1 ayant son centre à l'origine, de telle façon que

$$|z| = |w| = 1.$$

Il sera plus commode d'opérer sur l'intégrale (5) que sur l'intégrale (1). Nous avons alors

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 + \mu a a'\left(z + \frac{1}{z}\right) + \nu a a'\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Nos courbes singulières sont alors

$$z = 0, \qquad w = 0, \qquad z = \infty, \qquad w = \infty, \qquad \Delta^2 = 0.$$

Nous devons alors chercher la condition pour que trois de ces courbes se coupent en un même point, ou pour que deux d'entre elles se touchent, ou pour que l'une ait un point double.

Nous n'avons pas à nous inquiéter de la première condition, la courbe $\Delta^2 = 0$ passe *toujours* par l'origine; or, pour qu'une fonction définie par une intégrale définie présente un point singulier, il faut que deux points singuliers de la fonction sous le signe $\int$ *primitivement séparés* viennent à se confondre; c'est-à-dire, par exemple, que trois courbes singulières qui *primitivement ne passaient pas par un même point* viennent à passer par un même point. Ce n'est pas ici le cas, puisque les trois courbes $\Delta^2 = 0$, $z = 0$, $w = 0$ passent *toujours* par un même point.

De même la courbe $\Delta^2 = 0$ passe toujours par les points

$$z = 0, \quad w = \infty; \qquad z = \infty, \quad w = 0; \qquad z = w = \infty,$$

de sorte que nous n'avons pas à nous inquiéter de cette condition.

Pour que $z = 0$ ou $z = \infty$ touche $\Delta^2 = 0$, il faut que

$$\mu a a' = 0 \quad \text{soit} \quad \mu = 0.$$

Pour que $w = 0$, ou $w = \infty$ touche $\Delta^2 = 0$, il faut que

$$\nu a a' = 0 \quad \text{soit} \quad \nu = 0.$$

Pour que $\Delta^2 = 0$ ait un point double, il faut

$$\frac{d\Delta^2}{dw} = \frac{d\Delta^2}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$w = \pm 1, \qquad z = \pm 1$$

et

$$a^2 + a'^2 \pm 2\mu a a' \pm 2\nu a a' = 0. \tag{6}$$

285. Examinons de plus près ces résultats. Nous verrons d'abord que les solutions $\mu = 0$ ou $\nu = 0$ ne pouvaient convenir à la question. Supposons, en effet, d'abord que, remplaçant μ par $1 - \nu$, on développe suivant les puissances de ν. Si la valeur $\nu = 0$ était

un véritable point singulier pour la branche de la fonction considérée, le développement suivant les puissances de ν serait toujours divergent; or nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Si la valeur $\mu = 0$ ou $\nu = 1$ était un point singulier, nous devrions en conclure que la série diverge dès que $|\nu| > 1$, mais nous n'aurions pas à nous inquiéter de cette conséquence puisque ν est toujours < 1.

Supposons maintenant que l'on développe suivant les puissances de μ et ν regardées comme des variables indépendantes; si $\mu = 0$, ou bien $\nu = 0$ était un véritable point singulier pour la branche de fonction considérée, le développement serait toujours divergent, et nous savons qu'il n'en est pas ainsi et que le développement converge pourvu que μ et ν soient assez petits.

Il est aisé d'ailleurs de constater que, pour les petites valeurs de μ et ν, les points singuliers qui se confondent pour $\nu = 0$, par exemple, sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs au contour d'intégration. On pourrait toutefois se demander s'il en serait encore de même pour des valeurs plus grandes de μ. Mais la réponse est aisée; si les deux points singuliers sont tous deux intérieurs au contour pour μ petit, puis que nous fassions varier μ d'une manière continue, les deux points singuliers A et B et le contour varieront aussi d'une manière continue, mais ces deux points ne pourront cesser d'être intérieurs au contour que si l'un d'eux, A par exemple, franchit le contour; mais alors, nous pourrons toujours faire *fuir* le contour devant le point A, à moins que ce point A ne se confonde avec un autre point singulier C primitivement extérieur au contour, différent par conséquent du point B. Mais alors la convergence cesserait déjà par suite de la coïncidence des points A et C. On n'a donc pas à s'inquiéter de la coïncidence possible des points A et B puisqu'elle ne pourrait amener une singularité de notre fonction, qu'*après* que la convergence aurait déjà cessé pour d'autres causes.

Ainsi les points singuliers $\mu = 0$, $\nu = 0$ ne conviennent pas à la branche de fonction considérée; nous devons ajouter qu'ils pourraient convenir à d'autres branches de la fonction qui seraient définies par l'intégrale (5) étendue à d'autres contours que celui qui est défini par les deux équations

$$|z| = |w| = 1.$$

286. Pour la branche étudiée, nous n'avons donc à nous préoccuper que de la condition (6).

Posons $\nu = \sin^2 \frac{J}{2}$ et proposons-nous de développer suivant les puissances croissantes de ν. La condition (5) devient

$$a^2 + a'^2 + 2aa'[\pm(1-\nu) \pm \nu] = 0,$$

ce qui peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes

$$(5\ bis) \qquad (a' \pm a)^2 = 0; \qquad a^2 + a'^2 \pm 2aa'(1-2\nu) = 0.$$

Dans la première de ces relations ν n'entre pas; la seconde donne

$$\pm \nu = \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'}.$$

Le rayon de convergence sera donc la plus petite des deux valeurs

$$\left| \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'} \right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a'-a)^2}{4aa'}.$$

Ainsi la condition de convergence du développement sera

$$\sin^2 \frac{J}{2} < \frac{(a'-a)^2}{4aa'}.$$

La discussion des équations (5 *bis*) montrerait de même que les coefficients $A_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances de a, pourvu que

$$a < a'.$$

Considérons maintenant μ et ν comme des variables indépendantes et développons suivant les puissances de μ et ν.

La relation (6), qui définit les limites de convergence, s'écrit alors

$$a^2 + a'^2 \pm 2aa'\mu \pm 2aa'\nu = 0$$

ou

$$\pm \mu \pm \nu = \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

La condition de convergence du développement est donc

$$|\mu| + |\nu| < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Cette condition est toujours remplie, car on a

$$|\mu| = \mu; \quad |\nu| = \nu;$$
$$|\mu| + |\nu| = 1 < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Nos coefficients sont donc toujours développables suivant les puissances de $\cos^2 \frac{J}{2}$ *et* $\sin^2 \frac{J}{2}$.

Nous avons donné, au n° 270, un développement qui procède suivant les puissances de

$$\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2};$$

c'est le développement (28) du Chapitre XVIII. D'après ce qui précède, ce développement converge pourvu que

$$\left|\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right| + \left|\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right| < 1.$$

Or, comme μ, ν et α sont essentiellement positifs et plus petits que 1, que $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ est, par conséquent, plus petit que $\frac{1}{2}$ et que $\mu + \nu = 1$, on aura

$$\left|\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right| + \left|\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right| = (\mu+\nu)\frac{\alpha}{1+\alpha^2} < \frac{1}{2}.$$

La condition de convergence sera donc toujours remplie.

Du développement (28) du Chapitre VIII on passerait aisément au développement (27) qui procède suivant les puissances de α, μ et ν, il suffirait de développer chaque terme en

$$\left(\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right)^m \left(\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right)^n$$

suivant les puissances de α, ce qui est possible pourvu que $\alpha < 1$. Comme cette condition est toujours remplie, le développement (27) converge toujours.

287. Considérons maintenant le cas particulier où l'inclinaison est nulle et développons suivant les puissances des excentricités e et e'.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3) sont les courbes (4) et (4 *ter*), à savoir

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

1° Cherchons d'abord la condition pour que $R_1 = 0$ ait un point double. Pour nous en rendre compte, cherchons la signification de ces équations. Soient C l'orbite de la première planète, C′ celle de la seconde; d'après notre hypothèse ces deux coniques sont dans un même plan. A chaque valeur de x correspond un point M de la conique C et à chaque valeur de y un point M′ de la conique C′.

L'équation $R = 0$ exprime alors que la distance MM′ est nulle, ce qui peut ne pas vouloir dire que les deux points M et M′ coïncident puisque ces deux points peuvent être imaginaires.

L'équation $R_1 = 0$ exprime que le coefficient angulaire de la droite MM′ est égal à $\sqrt{-1}$ et l'équation $R_2 = 0$ exprime que ce coefficient est égal à $-\sqrt{-1}$.

Les équations $x = 0$, $x = \infty$ expriment que le point M est à l'infini sur l'une des deux branches infinies de la conique C; les équations $y = 0$, $y = \infty$ expriment que le point M′ est à l'infini sur la conique C′.

Pour que la courbe $R_1 = 0$ ait un point double, il faut et il suffit que la droite MM′ soit tangente à la fois aux deux coniques C et C′. Les deux coniques C et C′ ont un foyer commun, le Soleil. La droite MM′, qui est une tangente isotrope à C, doit passer par un des foyers de C, et pour la même raison elle doit passer par un des foyers de C′. Soient alors S le foyer commun de C et C′, R le second foyer de C, R′ celui de C′.

Pour que les deux coniques admettent une tangente isotrope commune (en dehors de celle qui passe par S qui existe toujours et qui ne saurait convenir), il faut donc que la droite MM′ passe par R et R′; c'est-à-dire que la droite RR′ ait pour coefficient angulaire $\sqrt{-1}$. Cette condition s'exprime analytiquement comme il suit :

$$ae\,E^{-i\varpi} = a'e'\,E^{-i\varpi'}.$$

Je représente par ϖ et ϖ' les longitudes des périhélies.

C'est là la condition pour que $R_1 = 0$ ait un point double (en

dehors de celui qui, correspondant à la tangente isotrope passant par S, existe toujours et ne saurait convenir).

2° De même la condition pour que $R_2 = 0$ ait un point double s'écrit

$$ae\,E^{i\varpi} = a'e'\,E^{i\varpi'}.$$

3° Pour que les deux courbes $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ soient tangentes, il faut que les deux coniques C et C' se touchent; car les points d'intersection à distance finie des deux courbes $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ correspondent aux quatre points d'intersection des deux coniques.

Il faut donc que la distance des deux foyers R et R' soit égale à la somme ou à la différence des grands axes; ce qui s'écrit

$$(ae\,E^{i\varpi} - a'e'\,E^{i\varpi'})(ae\,E^{-i\varpi} - a'e'\,E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2.$$

4° Il faut voir ensuite si l'un des points d'intersection des courbes (4 *ter*) ne peut pas se confondre avec l'un des points d'intersection de l'une de ces courbes avec l'une des droites (4) ou de deux de ces droites entre elles.

Ces deux catégories de points correspondent respectivement : aux quatre intersections de C et de C' (M et M' confondus) et aux cas où les deux points M et M' sont à l'infini sur les deux coniques C et C'.

La condition est donc que l'une des quatre intersections de C et de C' s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire qu'une asymptote de C soit parallèle à une asymptote de C'.

Cela s'écrit d'une des quatre manières

$$\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\,E^{2i\varpi} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi'}{2}\,E^{2i\varpi'},$$

$$\cot^2\frac{\varphi}{2}\,E^{2i\varpi} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi'}{2}\,E^{2i\varpi'},$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\,E^{-2i\varpi} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi'}{2}\,E^{-2i\varpi'},$$

$$\cot^2\frac{\varphi}{2}\,E^{-2i\varpi} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi'}{2}\,E^{-2i\varpi'},$$

en posant

$$e = \sin\varphi, \qquad e' = \sin\varphi'.$$

Je puis écrire aussi

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}}\,E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}}\,E^{2i\varpi'},$$

en prenant dans chaque fraction le signe inférieur dans les deux termes ou le signe supérieur dans les deux termes.

Voici donc quelles sont les équations qui définissent les valeurs critiques

$$ae\,E^{-i\varpi} = a'e'E^{-i\varpi'}, \tag{7}$$

$$ae\,E^{i\varpi} = a'e'E^{i\varpi'}, \tag{8}$$

$$(ae\,E^{i\varpi} - a'e'E^{i\varpi'})(ae\,E^{-i\varpi} - a'e'E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2, \tag{9}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}} E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}} E^{2i\varpi'}, \tag{10}$$

auxquelles il convient d'adjoindre

$$e = 1, \qquad e' = 1. \tag{11}$$

Mais nous avons vu que toutes les valeurs ainsi trouvées peuvent ne pas convenir et il est même aisé de voir qu'elles ne peuvent pas toutes convenir.

En effet, envisageons l'équation (7); elle est satisfaite pour

$$e = e' = 0.$$

Si donc les valeurs critiques définies par cette équation convenaient, notre fonction présenterait des singularités pour des valeurs très petites de e et e'. Nos coefficients ne seraient pas développables suivant les puissances de e et de e', *même pour des valeurs très petites de ces quantités.* Nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Donc les valeurs définies par l'équation (7) ne sauraient convenir.

Le même raisonnement s'applique aux équations (8) et (10). Il importe de remarquer que l'équation (10), malgré la présence des doubles signes, ne représente qu'une seule équation analytique irréductible qui prendrait sa forme algébrique si l'on chassait les radicaux. Cette équation irréductible est satisfaite pour $e = e' = 0$.

Restent les équations (9) et (11). Pour trouver la limite de convergence définie par l'équation (9), remarquons que a, a', ϖ et ϖ' sont des données de la question et sont réelles, mais que e et e' qui sont nos variables indépendantes pourront prendre des valeurs imaginaires.

Donnons à e une série de valeurs de module constant $|e|$, mais

d'argument variable; faisons de même pour e'. Le maximum du module du premier membre de (9) est

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')|;$$

la condition de convergence est donc

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer que les seules conditions de convergence de notre développement sont

$$(12)\qquad \begin{cases} |e| < 1, \quad |e'| < 1, \\ a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2. \end{cases}$$

Je ne voudrais pas entrer dans trop de détails; je ne puis cependant me contenter d'un aperçu : il faut donc que j'explique en quelques mots comment on peut donner à la démonstration toute sa rigueur.

Considérons le domaine D défini par les inégalités (12). Il ne contient pas de valeurs singulières satisfaisant aux équations (9) et (11). Mais il en contient qui satisfont aux équations (7), (8), (10). Si l'une de ces valeurs convenait, il en serait de même de toutes celles qui satisferaient à la même équation et qu'on pourrait rencontrer en faisant varier e et e' d'une manière continue et sans cesser de satisfaire à cette équation. Cela serait vrai au moins en ce qui concerne la détermination de la fonction que l'on atteindrait par cette variation continue.

Or on verrait qu'on peut atteindre, par une variation continue, une quelconque des valeurs singulières qui satisfont aux équations (7), (8), (10) et aux inégalités (12) en partant de la valeur $e = 0$, $e' = 0$ et sans cesser de satisfaire à ces équations et sans sortir du domaine D. La valeur singulière $e = 0$, $e' = 0$ ne convenant pas, aucune de ces valeurs ne convient.

Les conditions (12) *sont donc les seules conditions de convergence.*

La troisième condition (12) sera satisfaite quels que soient ϖ et ϖ', si l'on a

$$|ae| + |a'e'| < a' - a,$$

c'est-à-dire si la distance périhélie de l'une des planètes est plus grande que la distance aphélie de l'autre.

288. Le théorème que nous avons appliqué à la fin du numéro précédent est analogue à celui que nous avons rencontré au n° 285 et pourrait s'établir de la même manière. Mais il vaut mieux le rattacher à un théorème d'Analyse.

Si, dans un domaine D simplement connexe, une fonction de deux variables $F(x, y)$ est holomorphe, sauf *peut-être* pour les points qui satisfont à une relation analytique

$$x = \varphi(y),$$

et si *un* de ces points

$$y = y_0, \qquad x = \varphi(y_0)$$

est ordinaire, il en sera de même de tous les autres.

En effet, d'abord si ce point est ordinaire, il en sera de même de tous les points voisins.

Décrivons maintenant dans le plan des x un contour très petit, autour du point douteux $x = \varphi(y)$. Soit $x = \psi(y)$ un des points du contour. Nous pouvons supposer que le contour se déforme d'une manière continue quand y varie d'une manière continue, et que $\psi(y)$ est une fonction analytique.

Je dis d'abord que $F(x, y)$ est une fonction uniforme.

Supposons, en effet, qu'elle ne le soit pas, que $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ soient deux de ses déterminations, et que l'on passe de l'une à l'autre quand x décrit le contour. Alors

$$F_1[\psi(y), y] - F_2[\psi(y), y] = \Theta(y)$$

serait une fonction analytique de y, mais cette fonction serait nulle pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines, puisque la fonction $F(x, y)$ est uniforme pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines. La fonction $\Theta(y)$ est donc nulle pour toutes les valeurs de y et, par conséquent, $F(x, y)$ est uniforme pour toutes les valeurs de y.

La fonction F étant uniforme, la condition pour que $x = \varphi(y)$ soit un point ordinaire, c'est que l'intégrale

$$\int x^m F(x, y)\, dx,$$

prise le long du contour, soit nulle quel que soit l'entier positif m.

Cette intégrale est une fonction analytique de y; elle est nulle pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines puisque $x = \varphi(y_0)$ est un point ordinaire ainsi que les points voisins. Elle est donc identiquement nulle, et le point $x = \varphi(y)$ est ordinaire quel que soit y.

Le théorème s'étendrait aisément au cas où tous les points de D seraient ordinaires, sauf *peut-être* ceux qui satisfont à l'une des n relations analytiques

$$x = \varphi_1(y), \qquad x = \varphi_2(y), \qquad \ldots, \qquad x = \varphi_n(y),$$

et où l'on saurait, d'autre part, que les points

$$\begin{array}{ll} y = y_1, & x = \varphi_1(y_1), \\ y = y_2, & x = \varphi_2(y_2), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = y_n, & x = \varphi_n(y_n) \end{array}$$

sont ordinaires.

Nous nous bornerons aux cas particuliers simples traités plus haut, bien que les mêmes procédés soient applicables au cas général. Nous mentionnerons toutefois que M. Féraud a traité d'autres cas particuliers dans le Tome X des *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*.

CHAPITRE XXI.

RELATIONS DE RÉCURRENCE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

289. Reprenons les équations du n° 280

$$(1)\qquad -4\pi^2 B_{mm'} = \int\int \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,y)}},$$

$$(2)\qquad -4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}\,dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,y)}},$$

qui définissent les coefficients du développement, soit suivant les anomalies excentriques, soit suivant les anomalies moyennes. Rappelons que

$$R = x^2 y^2 \Delta^2, \qquad Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right],$$

$$2\Omega = me\left(x - \frac{1}{x}\right) + m'e'\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Ces coefficients A et B sont des fonctions des éléments, par exemple des grands axes, des excentricités et des inclinaisons et l'on peut se proposer l'étude analytique de ces fonctions. Je me propose de montrer :

1° Que ces fonctions satisfont à des équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

2° Qu'il y a entre ces fonctions, ou du moins entre les B, des relations de récurrence linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

290. A cet effet, je vais envisager une expression plus générale définie comme les A et les B par une intégrale double.

Soit

$$\Pi = \int\int \frac{\mathrm{H}E^{\Omega}\,dx\,dy}{xy\,\mathrm{F}^s} \tag{3}$$

une intégrale double prise le long de contours fermés.

H, Ω et F sont des polynomes entiers en x, $\frac{1}{x}$, y, $\frac{1}{y}$ dont le degré est respectivement k, ω et f. Quant à s, c'est la moitié d'un entier impair.

Avant d'aller plus loin, il faut que j'explique ce que j'entends par le degré d'un polynome en x, $\frac{1}{x}$, y, $\frac{1}{y}$. Un pareil polynome est de la forme

$$\sum \mathrm{A}x^a y^b,$$

a et b étant des entiers positifs ou négatifs. Je dirai qu'il est de degré m si

$$|a| \leqq m, \qquad |b| \leqq m.$$

Un polynome de degré m contient $(2m+1)^2$ coefficients arbitraires, puisque a de même que b peut prendre $2m+1$ valeurs.

Ceci posé, je suppose que Ω et F soient des polynomes donnés, mais que nous fassions varier H. Il y a $(2h+1)^2$ polynomes H de degré h linéairement indépendants, mais pour quelques-uns d'entre eux la fonction Π est nulle. En effet, si P est un polynome, l'intégrale

$$\int\int \frac{d}{dx}\,\frac{\mathrm{P}E^{\Omega}}{y\,\mathrm{F}^{s+1}}\,dx\,dy$$

sera nulle. En effet, intégrons d'abord par rapport à x, nous trouverons

$$\frac{\mathrm{P}E^{\Omega}}{y\,\mathrm{F}^{s-1}}.$$

Comme nous intégrons le long d'un contour fermé, cette quantité reprend la même valeur aux deux limites et l'intégrale est nulle.

On verrait de même que, si Q est un polynome, l'intégrale

$$\int\int \frac{d}{dy}\,\frac{\mathrm{Q}E^{\Omega}}{x\,\mathrm{F}^{s-1}}\,dx\,dy$$

est nulle. Il suffirait d'intégrer d'abord par rapport à y. Donc

Π sera nul si

$$\frac{\mathrm{HE}^{\Omega}}{xy\mathrm{F}^{s}} = \frac{d}{dx}\frac{\mathrm{PE}^{\Omega}}{y\mathrm{F}^{s-1}} + \frac{d}{dy}\frac{\mathrm{QE}^{\Omega}}{x\mathrm{F}^{s-1}},$$

c'est-à-dire si

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} = {} & x\frac{d\mathrm{P}}{dx}\mathrm{F} + x\frac{d\Omega}{dx}\mathrm{PF} + (1-s)x\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{P} \\ & + y\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\mathrm{F} + y\frac{d\Omega}{dy}\mathrm{QF} + (1-s)y\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{Q}. \end{aligned}\right.$$

Si P et Q sont de degré p, nous voyons que le deuxième membre est de degré $p+f+\omega$. Nous devons donc avoir

$$p = h - f - \omega.$$

Il y a donc $(2h-2f-2\omega+1)^2$ polynomes P distincts et autant de polynomes Q. Nous pouvons donc former

$$2(2h-2f-2\omega+1)^2$$

relations de la forme (4). Mais ces relations sont-elles distinctes; ne peut-il pas arriver que le deuxième membre de (4) soit identiquement nul ? Cela arrivera si

$$\frac{d}{dx}\frac{\mathrm{PE}^{\Omega}}{y\mathrm{F}^{s-1}} + \frac{d}{dy}\frac{\mathrm{QE}^{\Omega}}{x\mathrm{F}^{s-1}} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\mathrm{QE}^{\Omega}}{\mathrm{F}^{s-1}}\frac{dx}{x} - \frac{\mathrm{PE}^{\Omega}}{\mathrm{F}^{s-1}}\frac{dy}{y}$$

est une différentielle exacte; je représente cette différentielle par

$$d\frac{\mathrm{SE}^{\Omega}}{\mathrm{F}^{s-2}} = d\mathrm{U},$$

ce qui donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Q} &= x\frac{d\mathrm{S}}{dx}\mathrm{F} + x\frac{d\Omega}{dx}\mathrm{SF} + (2-s)x\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{S}, \\ -\mathrm{P} &= y\frac{d\mathrm{S}}{dy}\mathrm{F} + y\frac{d\Omega}{dy}\mathrm{SF} + (2-s)y\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Je dis que S est un polynome entier $\left(\text{en } x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}\right)$ et d'abord que c'est une fonction uniforme.

1° L'intégrale $\int dU$ ne présente pas de périodes cycliques. Supposons que l'on calcule cette intégrale en regardant y comme une constante et en faisant décrire à x dans son plan une courbe fermée, à l'intérieur de laquelle il y ait un nombre *pair* de valeurs de x telles que $F = 0$. Il en résultera que quand on aura décrit cette courbe fermée $\sqrt{F}$ et F^{s-1} reviendront à leur valeur initiale. L'intégrale prise le long de ce contour serait une période cyclique de $\int dU$.

Cette période, si elle existe, sera une fonction de y. Je dis que cette fonction devra se réduire à une constante. Si en effet la fonction U admet deux déterminations U' et U'', on aura

$$\frac{dU'}{dy} = \frac{dU''}{dy} = -\frac{PE^{\Omega}}{y F^{s-1}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d(U' - U'')}{dy} = 0. \tag{6}$$

Si l'on se reporte maintenant à l'analyse de M. Picard dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables (t. I, p. 88 à 90), on verra que cela ne saurait avoir lieu sans que la période cyclique soit nulle si le polynome F est le plus général de son degré et dans beaucoup d'autres cas encore.

2° L'intégrale ne présente pas de période polaire. Elle pourrait en présenter si la fonction sous le signe $\int$ devenait infinie, mais cette fonction ne peut devenir infinie que pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $F = 0$.

Pour $F = 0$, la fonction est infiniment grande d'ordre $s - 1$ à moins que F ne soit divisible par un carré parfait, ce qui n'arrivera pas si F est le polynome le plus général de son degré. La fonction n'étant pas infinie d'ordre entier, il ne peut résulter de là une période polaire.

Soit maintenant $x = 0$. Développons la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances entières positives et négatives de x de telle façon que l'on ait

$$\frac{QE^{\Omega}}{x F^{s-1}} = \sum C_m x^m,$$

les C_m étant des fonctions de y; alors nous aurons une période polaire qui sera

$$2i\pi C_{-1}.$$

En vertu de l'équation (6), cette période devra être une constante indépendante de y. *Je dis que cette constante est nulle.*

Soit $y = y_0$ une des racines simples de l'équation

$$F(o, y) = o.$$

Bien entendu, avant de faire $x = o$, il faut multiplier F par une puissance convenable de x de façon que F reste fini pour $x = o$.

Faisons varier y de façon que cette variable revienne à sa valeur initiale après avoir tourné autour de y_0; alors $\sqrt{F}$ se changera en $-\sqrt{F}$, $\frac{dU}{dx}$ en $-\frac{dU}{dx}$, et, par conséquent, C_{-1} en $-C_{-1}$; mais, comme C_{-1} est une constante, on a

$$C_{-1} = -C_{-1},$$

d'où

$$C_{-1} = o. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'y a donc pas de période polaire pour $x = o$ et l'on verrait de même qu'il n'y en a pas pour $y = o$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait pas toutefois si F se réduisait à un carré parfait pour $x = o$.

3° Mais S pourrait encore ne pas être uniforme pour une autre cause. Supposons que l'on prenne l'intégrale U le long d'un contour enveloppant un nombre *impair* de valeurs de x qui annulent F. Alors $\sqrt{F}$ se change en $-\sqrt{F}$ quand on parcourt ce contour.

Donc U se change en $U' = h - U$, h étant une constante qui ne peut dépendre de y. Ici l'équation (6) ne s'applique pas et la différence $U - U'$ n'est pas indépendante de y; car, $\sqrt{F}$ ayant changé de signe, $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{dU'}{dy}$ ne sont pas égaux, mais égaux et de signe contraire, de sorte que

$$\frac{dU'}{dy} = -\frac{dU}{dy}, \qquad \frac{dh}{dy} = o.$$

Ainsi h est une constante absolue. De plus, si nous considérons un autre contour analogue qui change U en $U'' = h' - U$, je dis

que les deux constantes h et h' sont identiques ; sans quoi l'intégrale admettrait la période $h' - h$.

La constante h étant la même pour tous les contours, nous pouvons choisir la constante arbitraire d'intégration de façon que $h = 0$. Alors notre intégrale ne sera susceptible que de deux valeurs U et $-$U. D'ailleurs le signe de U changera en même temps que celui de $\sqrt{F}$, de telle sorte que $\frac{U}{\sqrt{F}}$ et par conséquent S est une fonction uniforme.

4° S est un polynome entier en

$$x, \quad \frac{1}{x}, \quad y, \quad \frac{1}{y}.$$

En effet, l'intégrale et S ne peuvent devenir infinis que si les dérivées

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}$$

deviennent infinies, c'est-à-dire si

$$x = \infty, \qquad y = \infty, \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad F = 0.$$

Pour $F = 0$, les dérivées deviennent infinies d'ordre $s - 1$ et par conséquent U devient infini d'ordre $s - 2$ et S reste fini.

Voyons comment se comporte S pour x très grand. Les termes prépondérants de F, Q, Ω se réduisent respectivement à x^b, x^p et x^ω multipliés par une fonction de y (f, p et ω étant les degrés de F, Q, Ω). Donc $\frac{dU}{dx}$ réduit à ses termes prépondérants se réduira à

$$\varphi(y)\, x^{f(1-s)+p-1}\, E^{\psi(y)x^\omega}$$

et U à

$$\theta(y)\, x^{f(1-s)+p-\omega}\, E^{\psi(y)x^\omega}$$

et enfin S à

$$\eta(y)\, x^{p-f-\omega},$$

$\theta(y)$ et $\eta(y)$ étant des fonctions de y faciles à former.

On trouverait le même résultat en cherchant comment S se comporte pour $x = 0$; il suffirait de changer f, p et ω en $-f$, $-p$ et $-\omega$. On raisonnerait encore de même pour y très grand ou très petit.

Donc S se comporte comme un polynome de degré

$$p - f - \omega = h - 2f - 2\omega.$$

C'est donc un polynome de degré $h - 2f - 2\omega$, dépendant de

$$(2h - 4f - 4\omega + 1)^2$$

coefficients arbitraires.

Donc parmi les

$$2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

relations (4) il y en a seulement

$$2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2 - (2h - 4f - 4\omega + 1)^2,$$

qui sont distinctes. Donc nous n'avons que

$$(2h + 1)^2 + (2h - 4f - 4\omega + 1)^2 - 2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

expressions Π qui soient linéairement indépendantes. Or ce nombre est égal à

$$8(f + \omega)^2.$$

Il est donc indépendant de h et s. Donc, quelque grand que soit le degré de h du polynome H, nous n'aurons toujours, au plus, que $8(f + \omega)^2$ expressions Π distinctes.

Remarquons que les expressions où $s = s_0$ rentrent comme cas particuliers dans celles où $s = s_0 + 1$, puisque nous pouvons changer s en $s + 1$ et H en HF sans changer l'expression Π. Donc toutes les expressions Π, quel que soit le nombre s, le degré du polynome H et ce polynome lui-même, peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $8(f + \omega)^2$ d'entre elles.

Si nous prenons

$$8(f + \omega)^2 + 1$$

expressions Π quelconques, il y aura entre elles une relation linéaire, *dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des coefficients des polynomes* F, Ω *qui sont les mêmes pour toutes ces expressions* Π *ainsi que des divers polynomes* H *qui ne sont pas les mêmes pour les différentes expressions* Π. Cela résulte de la façon dont nos relations (4) ont été formées.

291. Le nombre des expressions Π distinctes peut s'abaisser si les polynomes présentent certaines espèces de symétrie. Supposons par exemple que F, Ω et H ne changent pas quand on change x

en $-x$ et y en $-y$. Si alors nous écrivons ces polynomes sous la forme

$$\sum A x^a y^b,$$

nous voyons que les deux entiers a et b doivent être de même parité.

Un polynome de degré m présentant cette symétrie ne contient plus que

$$2m^2 + 2m + 1$$

coefficients arbitraires. Nous n'aurons donc que

$$2h^2 + 2h + 1$$

polynomes H.

Si les polynomes P et Q présentent cette même symétrie il en sera de même du second membre de (4). D'ailleurs nous obtiendrons de cette façon tous les polynomes H symétriques qui sont de la forme (4). Soit en effet

$$\Phi(P, Q)$$

le second membre de (4). Considérons deux polynomes P et Q non symétriques de telle façon que $P(x, y)$ ne soit pas égal à

$$P(-x, -y)$$

et supposons que

$$\Phi[P(x, y), \quad Q(x, y)]$$

soit égal à un polynome symétrique H de telle sorte que

$$H(x, y) = H(-x, -y);$$

nous aurons à la fois

$$H(x, y) = \Phi[P(x, y), \quad Q(x, y)]$$

et

$$H(x, y) = H(-x, -y) = \Phi[P(-x, -y), \quad Q(-x, -y)],$$

ou, en additionnant et divisant par 2,

$$H(x, y) = \Phi\left[\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2}\right],$$

qui est une relation de la forme (4) où les polynomes P et Q sont

remplacés par les polynomes symétriques

$$\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \quad \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2}.$$

Il suffira donc de considérer les relations (4) formées avec des polynomes symétriques. Nous aurons donc, non plus

$$2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

relations (4), mais

$$2[2(h - f - \omega)^2 + 2(h - f - \omega) + 1].$$

De même, si nous nous reportons aux relations (5), nous verrons que, si P et Q sont symétriques, il en sera de même de S; nous aurons donc

$$2(h - 2f - 2\omega)^2 + 2(h - 2f - 2\omega) + 1$$

polynomes S.

En résumé le nombre des expressions Π distinctes ne sera plus

$$(2h+1)^2 + (2h - 2f - 2\omega + 1)^2 - 2(2h - f - \omega + 1)^2 = 8(f + \omega)^2,$$

mais seulement

$$\theta(h) + \theta(h - 2f - 2\omega) - 2\theta(h - f - \omega),$$

en posant

$$\theta(h) = 2h^2 + 2h + 1.$$

Ce nombre sera donc

$$4(f + \omega)^2.$$

292. Appliquons ce qui précède aux expressions (1) et (2), mais auparavant il est préférable de les transformer en posant

$$x = \xi\eta, \qquad y = \frac{\xi}{\eta}.$$

Alors, Δ^2, qui était un polynome contenant des termes en

$$1,\ x^2,\ x^{-2},\ y^2,\ y^{-2},\ xy,\ xy^{-1},\ x^{-1}y,\ x^{-1}y^{-1},\ x,\ y,\ x^{-1},\ y^{-1},$$

deviendra un polynome entier du second ordre en

$$\xi,\ \frac{1}{\xi},\ \eta,\ \frac{1}{\eta}.$$

Ce polynome ne change pas quand on change ξ et η en $-\xi$ et $-\eta$. Ce sera lui qui jouera le rôle de F; nous avons donc

$$f=2.$$

Le polynome Ω devient de son côté un polynome symétrique du premier degré en

$$\xi, \quad \frac{1}{\xi}, \quad \eta, \quad \frac{1}{\eta},$$

de sorte que

$$\omega=1.$$

Dans la formule (1), bien entendu, où l'exponentielle E^{Ω} ne figure pas, on prendra $\omega=0$.

Le rôle du polynome H sera joué dans l'expression (1) par $\frac{1}{x^m y^{m'}}$, et dans l'expression (2) par $\frac{Q}{x^m y^{m'}}$, qui nous donneront l'une et l'autre un polynome symétrique en

$$\xi, \quad \frac{1}{\xi}, \quad \eta, \quad \frac{1}{\eta}.$$

Nos coefficients $B_{mm'}$ et $A_{mm'}$ seront représentés à un facteur numérique près par l'intégrale

$$\int\int \mathrm{H}\, \mathrm{E}^{\Omega} \frac{d\xi\, d\eta}{\xi\eta\Delta},$$

où Ω est du degré 0 ou 1 et où

$$\mathrm{H}=\frac{1}{x^m y^{m'}} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{x^m y^{m'}};$$

où enfin Δ joue le rôle de $F^{\frac{1}{2}}$. Ce sont donc des expressions de la forme Π.

Les coefficients de ces polynomes F, Ω et H sont d'ailleurs des fonctions rationnelles des grands axes a et a', des excentricités e, e' et de $\sqrt{1-e^2}$, $\sqrt{1-e'^2}$, ou, si l'on aime mieux, de ε et de ε', en posant

$$e=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \qquad e'=\frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Ce sont également des fonctions rationnelles des lignes trigono-

métriques dépendant de l'inclinaison et des périhélies, c'est-à-dire de $\operatorname{tang}\frac{J}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\varpi}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\varpi'}{2}$.

Ce sont en résumé des fonctions rationnelles des sept quantités

$$a, \quad a', \quad \varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \operatorname{tang}\frac{J}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\varpi}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\varpi'}{2},$$

les longitudes des périhélies étant comptées dans les plans des deux orbites, à partir de l'intersection mutuelle de ces plans. Ce sont ces sept quantités que nous appellerons les *éléments*.

Envisageons maintenant la dérivée de $A_{mm'}$, ou de $B_{mm'}$ par rapport à l'un de ces éléments, que je désigne par α; elle sera égale à

$$\int\int H' E\Omega \frac{d\xi}{\xi\eta}\frac{d\eta}{\Delta^3}$$

où

$$H' = \Delta^2\left(\frac{dH}{d\alpha} + H\frac{d\Omega}{d\alpha}\right) - \frac{1}{2}H\frac{d\Delta^2}{d\alpha}$$

sera un polynome de même forme que H. Nous retrouvons donc une expression de la forme Π avec cette différence que l'exposant s qui était égal à $\frac{1}{2}$ est maintenant $\frac{3}{2}$.

Si nous considérons une dérivée partielle seconde, cet exposant deviendra $\frac{5}{2}$, rien d'ailleurs ne sera changé, et il en serait de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

Ainsi nos coefficients $A_{mm'}$, $B_{mm'}$ *ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport aux éléments sont des expressions de la forme* Π.

Les conclusions du n° 290 sont vraies quand le polynome F est le plus général de son degré. Elles subsisteraient bien entendu dans les cas particuliers, par passage à la limite; mais ici elles sont directement applicables.

En effet le théorème de M. Picard s'applique directement toutes les fois que le polynome F est indécomposable.

C'est ce qui arrive pour le polynome Δ^2 dans le cas général du problème des trois corps. Quand l'inclinaison est nulle, le polynome

Δ^2 se décompose, mais nous restons dans les cas très étendus où le théorème de M. Picard est applicable.

Il n'y a donc pas de période cyclique.

Pour montrer ensuite qu'il n'y a pas de période polaire, nous avons supposé que $F(x, y)$ ne devenait pas un carré parfait quand après l'avoir multiplié par une puissance convenable de x on y fait $x = 0$.

Si nous appliquons cette règle au polynome

$$\Delta^2 = F(\xi, \eta),$$

cela reviendra à réduire Δ^2 aux termes en x^2, xy, y^2, ou en x^{-2}, $x^{-1}y^{-1}$, y^{-2}, ou en x^2, xy^{-1}, y^{-2}, ou encore en x^{-2}, $x^{-1}y$, y^2. Ce polynome ne se réduit pas ainsi à un carré parfait. La condition est donc remplie.

293. Appliquons d'abord cela à l'expression (1) et aux coefficients $B_{mm'}$; nous avons

$$f = 2, \qquad \omega = 0.$$

Le nombre des expressions distinctes est donc

$$4(f + \omega)^2 = 16.$$

Nous n'avons donc que seize coefficients distincts. Donc :

Si l'on envisage le développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, il y aura entre les coefficients des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des éléments. Ces relations permettent d'exprimer tous ces coefficients en fonctions de seize d'entre eux.

Ces relations de récurrence sont assimilables à celles qui relient les coefficients de Laplace. Ces relations peuvent s'obtenir de la façon suivante; écrivons les deux identités

$$x \frac{d\Delta^2}{dx}\left(\frac{1}{\Delta}\right) + 2x \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx}\Delta^2 = 0,$$

$$y \frac{d\Delta^2}{dy}\left(\frac{1}{\Delta}\right) + 2y \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy}\Delta^2 = 0.$$

Remplaçons dans ces identités Δ^2 et $\frac{1}{\Delta}$ par leurs développements suivant les puissances entières positives et négatives de x et y, et égalons à zéro dans l'une de ces identités le coefficient de $x^p y^q$.

On a retrouvé dans le *Nachlass* de Jacobi, sans démonstration, un énoncé d'après lequel le nombre des coefficients distincts serait non pas 16, mais 15. Cela est possible, car 16 n'est ici qu'un maximum. Il serait intéressant de pousser la vérification jusqu'au bout.

294. Supposons maintenant que l'on envisage un coefficient et ses dérivées partielles des divers ordres par rapport aux éléments. Ce sont encore des expressions Π, elles sont donc liées à seize d'entre elles par des relations linéaires.

Ainsi chacun de nos coefficients B, *considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du seizième ordre au plus, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.*

Si l'on considère deux ou plusieurs éléments comme des variables indépendantes, on peut former aussi un très grand nombre d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Tous nos coefficients B, et toutes les dérivées partielles peuvent s'exprimer linéairement en fonctions de seize de ces coefficients, ou bien encore en fonction de l'un d'eux et de quinze de ses dérivées partielles.

295. Passons maintenant au cas de l'expression (2) et des coefficients $A_{mm'}$, qui sont ceux du développement suivant les anomalies moyennes. Cette fois

$$f = 2, \qquad \omega = 1,$$
$$4(f+\omega)^2 = 36.$$

Seulement le polynome Ω dépend de m et de m'. Il n'est donc pas le même pour deux coefficients $A_{mm'}$ différents.

Les conclusions du n° **293** ne se généralisent donc pas.

Au contraire, le polynome Ω est le même pour un coefficient $A_{mm'}$ et pour toutes ses dérivées partielles, de sorte que le théorème du n° **294** se généralise immédiatement.

Chacun des coefficients A, *considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du trente-sixième ordre au plus.* Il satisfait en outre à de nombreuses équations linéaires aux dérivées partielles, si l'on regarde les divers éléments comme des variables indépendantes.

296. Passons au cas où les excentricités sont nulles; il en résulte de grandes simplifications. D'abord, en effet, il n'y a pas de distinction à faire entre les anomalies excentriques et moyennes, de sorte que l'on a

$$\Omega = 0, \qquad A_{mm'} = B_{mm'}.$$

De plus on a

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 + aa'\mu\left(z + \frac{1}{z}\right) + aa'\nu\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

en posant

$$z = \frac{x}{y} = \eta^2, \qquad w = xy = \xi^2.$$

D'ailleurs les coefficients $A_{mm'}$ sont exprimés à un coefficient numérique près par l'intégrale

$$\int\int H \frac{dz\,dw}{zw\Delta},$$

où H est un polynome entier en z, w, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{w}$.

On a donc

$$f = 1, \qquad \omega = 0.$$

Le polynome qui joue le rôle de F est ici Δ^2, et l'on voit que, pour $z = 0$, l'expression $z\Delta$ se réduit à une constante; le raisonnement par lequel on démontre qu'il ne peut y avoir de périodes polaires n'est donc pas applicable immédiatement [puisque nous avons dû supposer plus haut que le premier membre de l'équation $F(x, y) = 0$ ne se réduisait pas à un carré parfait pour $x = 0$].

Nous pourrions nous tirer d'affaire de plusieurs manières différentes :

1° En nous servant des fonction elliptiques, comme je l'ai fait dans le *Bulletin astronomique*, t. XIV;

2° En revenant aux variables x et y.

Mais je préfère me servir de la symétrie du polynome Δ^2.

Ce polynome ne change pas en effet quand on change z en $\frac{1}{z}$, ou bien w en $\frac{1}{w}$. Un polynome satisfaisant à cette double condition sera ce que j'appellerai désormais *symétrique*.

Dans le développement de $\frac{1}{\Delta}$ les coefficients de

$$z^a w^b, \quad z^{-a} w^b, \quad z^a w^{-b}, \quad z^{-a} w^{-b}$$

sont égaux, et peuvent être représentés à un même coefficient numérique près $-\frac{1}{4\pi^2}$ par l'une des intégrales doubles

$$\int\int z^{\pm a} w^{\pm b} \frac{dz\,dw}{zw\Delta} = \int\int \mathrm{H} \frac{dz\,dw}{zw\Delta},$$

où

$$\mathrm{H} = \frac{z^a w^b + z^{-a} w^b + z^a w^{-b} + z^{-a} w^{-b}}{4}.$$

Nous pouvons donc toujours supposer que le polynome H *est symétrique.*

Nous devons ensuite rechercher quels sont les polynomes H symétriques qui nous conduisent à une intégrale double identiquement nulle. Ce sont ceux qui sont de la forme (4). Dans le second membre de l'expression (4), il faut, bien entendu, faire $\Omega = 0$ et remplacer x et y par les variables nouvelles z et w.

Je remarque maintenant que si, dans cette expression (4) ainsi modifiée, on remplace $P(z, w)$, $Q(z, w)$ par $-P\left(\frac{1}{z}, w\right)$, $Q\left(\frac{1}{z}, w\right)$, l'expression $H(z, w)$ se change en $H\left(\frac{1}{z}, w\right)$. De même, si l'on remplace $P(z, w)$, $Q(z, w)$ par $P\left(z, \frac{1}{w}\right)$, $-Q\left(z, \frac{1}{w}\right)$, l'expression $H(z, w)$ se change en $H\left(z, \frac{1}{w}\right)$.

Si l'on a alors

$$P(z, w) = -P\left(\frac{1}{z}, w\right) = P\left(z, \frac{1}{w}\right) = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

$$Q(z, w) = Q\left(\frac{1}{z}, w\right) = -Q\left(z, \frac{1}{w}\right) = -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

nous dirons que P et Q présentent la *symétrie croisée*.

Il est clair que, si P et Q présentent la symétrie croisée, l'expression H présentera la symétrie directe.

Si H présente la symétrie directe, je dis que l'on pourra toujours, sans restreindre la généralité, supposer que P et Q ont la symétrie croisée. En effet, si H est symétrique, on pourra, sans changer H, remplacer P et Q par

$$-P\left(\frac{1}{z}, w\right), \quad Q\left(\frac{1}{z}, w\right),$$

ou par

$$P\left(z, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(z, \frac{1}{w}\right),$$

ou par

$$-P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

ou enfin par les deux polynomes

$$\frac{P(z, w) - P\left(\frac{1}{z}, w\right) + P\left(z, \frac{1}{w}\right) - P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)}{4},$$

$$\frac{Q(z, w) + Q\left(\frac{1}{z}, w\right) - Q\left(z, \frac{1}{w}\right) - Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)}{4},$$

qui présentent la symétrie croisée.

Si maintenant P et Q présentent la symétrie croisée, l'expression

$$\int\left(\frac{Q}{F^{s-1}}\frac{dz}{z} - \frac{P}{F^{s-1}}\frac{dw}{w}\right) = \int dU = \int d\frac{S}{F^{s-2}},$$

supposée intégrable, présentera une troisième espèce de symétrie que j'appellerai la *symétrie inverse,* c'est-à-dire que S et U changeront de signe quand on changera z en $\frac{1}{z}$, ou bien w en $\frac{1}{w}$.

Dans ces conditions,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{Q}{F^{s-1}z}$$

change de signe quand on change w en $\frac{1}{w}$. Si nous posons

$$\frac{dU}{dz} = \sum C_m z^m,$$

notre période polaire, si elle existe, sera $2i\pi C_{-1}$; elle sera indépendante de w (qui joue ici le rôle de y). D'autre part, elle devra

changer de signe quand on changera w en $\frac{1}{w}$; elle est donc nulle.

C. Q. F. D.

Examinons maintenant le degré de ces différents polynomes; mais nous ne définirons pas le degré de la même manière que dans les numéros précédents.

Soit un polynome en z, $\frac{1}{z}$, w, $\frac{1}{w}$,

$$\sum A z^a w^b.$$

Nous dirons qu'il est de degré m si

$$|a| + |b| \leqq m.$$

Soit alors h le degré de H, nous voyons que celui de P et de Q est $h - 1$ et que celui de S est $h - 2$.

Un polynome de degré h contient $2h^2 + 2h + 1$ coefficients arbitraires, mais, s'il est symétrique, il n'en contient plus que $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ si la symétrie est directe et, en effet, les coefficients de $z^{\pm a} w^{\pm b}$ se déduisent d'un seul d'entre eux, de sorte que nous n'avons plus à envisager que les termes où les deux exposants sont nuls ou positifs. Si la symétrie est croisée, il arrive (pour P par exemple) que les termes indépendants de z sont nuls, de sorte que nous ne devons plus envisager que les termes où l'un des exposants est nul, et l'autre nul ou positif. Cela fait $\frac{h(h-1)}{2}$ coefficients distincts. Si enfin la symétrie est inverse, les termes indépendants soit de w, soit de z, sont nuls, et les deux exposants doivent être positifs, de sorte qu'il reste $\frac{h(h-1)}{2}$ coefficients. Nous sommes donc conduits au Tableau suivant :

Polynome.	Degré.	Symétrie.	Nombre des coefficients.
H	h	directe	$\frac{(h+1)(h+2)}{2}$
P	$h-1$	croisée	$\frac{h(h-1)}{2}$
Q	$h-1$	croisée	$\frac{h(h-1)}{2}$
S	$h-2$	inverse	$\frac{(h-2)(h-3)}{2}$

Le nombre des expressions Π distinctes est donc

$$\frac{(h+1)(h+2}{2}+\frac{(h-2)(h-3)}{2}-h(h-1)=4.$$

Donc, entre les coefficients du développement de la fonction perturbatrice, il y a des relations linéaires de récurrence dont les coefficients sont rationnels par rapport aux éléments et qui permettent d'exprimer tous ces coefficients à l'aide de quatre d'entre eux. Chacun d'eux, considéré comme fonction de l'un des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Considéré comme fonction de tous les éléments, il satisfait à un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Tous les coefficients et toutes leurs dérivées partielles peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de quatre des coefficients, ou bien encore à l'aide de l'un d'eux et de trois de ses dérivées partielles.

297. On arriverait au même résultat en conservant les variables x et y; on aurait alors

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 + aa'\mu\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + aa'\nu\left(xy+\frac{1}{xy}\right).$$

Ce polynome serait de degré 1 au sens du n° 290 et non plus du n° 296. Il serait d'ailleurs symétrique au sens du n° 291 et non plus du n° 296. Enfin l'expression $x\Delta^2$ se réduirait, pour $x=0$, à

$$aa'\left(\mu y+\frac{\nu}{y}\right),$$

qui n'est pas un carré parfait; nous pourrions donc appliquer les conclusions du n° 291, et, puisque

$$f=1, \qquad \varpi=0,$$

le nombre des expressions Π distinctes serait

$$4(f+\varpi)^2=4. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

298. Les équations aux dérivées partielles auxquelles conduit l'analyse précédente ont déjà été rencontrées. Ce sont celles que

nous avons étudiées au n° 261. Nous avons vu que les onze dérivées partielles de Z, désignées dans ce numéro par (8), (9), (10), (11), (12), (13), s'expriment linéairement en fonctions des neuf expressions (14) qui sont elles-mêmes liées par les trois relations (15). Il y a donc, entre ces onze dérivées, cinq relations. Soit

$$Z = \sum U z^h w^k.$$

Les coefficients de $z^h w^k$ dans les onze dérivées partielles seront

$$\frac{dU}{d\alpha}, \quad \frac{dU}{d\mu}, \quad \frac{dU}{d\nu}, \quad -h^2 U, \quad -k^2 U, \quad \frac{d^2 U}{d\mu^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\mu\, d\nu}, \quad \frac{d^2 U}{d\nu^2},$$

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\alpha\, d\mu}, \quad \frac{d^2 U}{d\alpha\, d\nu}.$$

Il y aura donc cinq relations entre U et ses neuf dérivées des deux premiers ordres. D'ailleurs, outre les relations (15), les neuf expressions (14) sont liées entre elles et à $Z = \sum U z^h w^k$ par la relation

$$(1 + \alpha^2) Z' - 2\alpha\mu Z' \cos\xi - 2\alpha\nu Z' \cos\eta = -s Z.$$

Nous aurons donc six relations entre U et ses neuf dérivées, c'est-à-dire que U satisfait à six équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. De U et de ses dérivées, en tout dix expressions, il en reste donc quatre qui sont indépendantes.

Parmi ces six équations, nous distinguerons celles qui ont été étudiées à la fin du n° 261 et dont nous avons vu la parenté avec les équations de M. Appell. Nous avons vu que ces équations admettent quatre solutions distinctes, de sorte que U considéré comme fonction d'un seul élément satisfait à une équation différentielle du quatrième ordre.

299. Les fonctions que nous avons étudiées dans ce Chapitre sont définies par des intégrales doubles et ces intégrales doubles sont prises le long des contours fermés. En d'autres termes, ce sont des *périodes* de l'intégrale double indéfinie

$$\int\int H E^{\Omega} \frac{dx\, dy}{xy F^s}.$$

Supposons que nous fassions varier l'un des éléments, que j'appellerai α, en lui donnant bien entendu des valeurs imaginaires, et que cet élément α décrive dans son plan un contour fermé. Notre coefficient, représenté par notre intégrale double, est une fonction analytique de l'élément α; quand cet élément aura décrit son contour fermé, nous retomberons sur une autre détermination de cette fonction analytique, et cette détermination ne pourra être qu'une autre période de notre intégrale définie double.

Supposons que cette intégrale définie ait k périodes fondamentales

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_k;$$

toutes les autres périodes et, par conséquent, toutes les déterminations de notre fonction, seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ces périodes fondamentales.

Quand donc la variable décrira un contour fermé, les différentes déterminations de la fonction subiront une transformation linéaire à coefficients entiers. Considérons maintenant plusieurs fonctions Π qui pourront différer par les polynomes H et Ω, mais pas par le polynome F, toutes ces fonctions subiront *la même* transformation linéaire, puisque celle-ci ne dépend que de la déformation des contours d'intégration.

Soit donc Δ le déterminant formé par k déterminations correspondantes de k fonctions Π; ce déterminant sera multiplié simplement par un facteur numérique quand la variable décrira un contour fermé; le rapport de deux de ces déterminants demeurera donc constant, ce sera donc une fonction uniforme.

Donc entre $k+1$ fonctions Π, il y aura une relation linéaire dont les coefficients seront des fonctions uniformes des éléments. *Donc le nombre des périodes fondamentales est égal à celui des fonctions* Π *en fonction desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer par des relations linéaires dont les coefficients sont des fonctions uniformes des éléments.*

Si les fonctions Π ne présentent que des singularités algébriques, ces fonctions uniformes se comporteront comme des fonctions rationnelles. Les coefficients de nos relations seront des fonctions non seulement uniformes, mais rationnelles. C'est ce qui arrive quand $\Omega = 0$.

Nous pouvons prévoir par là que le nombre des périodes fonda-

mentales est de 16 dans le cas général et de 4 si les excentricités sont nulles C'est ce que montre le résultat obtenu au sujet du développement suivant les anomalies excentriques.

Mais alors nous pouvons en tirer une conclusion relative au développement suivant les anomalies moyennes. Il y aura entre les coefficients de ce développement des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions non rationnelles mais uniformes des éléments, et ces relations permettront de les exprimer tous à l'aide de seize d'entre eux. De plus chacun de ces coefficients satisfera à une équation différentielle linéaire, qui sera du seizième ordre (et non plus du trente-sixième), mais dont les coefficients seront non plus rationnels, mais uniformes.

Ces relations de récurrence et ces équations différentielles sont analogues à celles que nous avons rencontrées dans l'étude des coefficients de Laplace. Nul doute qu'elles ne puissent rendre les mêmes services dans le cas où les excentricités sont nulles; mais il n'en est pas de même dans le cas général; leur ordre semble trop élevé; heureusement il est permis d'espérer que ces équations ne sont pas irréductibles et que l'étude des périodes de l'intégrale double permettra d'en abaisser l'ordre.

J'ajouterai que M. Féraud, dans le Tome VIII des *Annales de l'Observatoire de Bordeaux,* a montré que, par suite de certaines symétries, cet ordre pouvait s'abaisser de lui-même dans certains cas particuliers.

CHAPITRE XXII.

CALCUL NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS.

300. Dans les Chapitres précédents, nous avons cherché à obtenir le développement *analytique* des coefficients à l'aide de séries procédant suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. L'emploi de ces développements ne présenterait aucune difficulté si le nombre des termes n'était pas si grand. Mais ce nombre a effrayé beaucoup d'astronomes qui se sont efforcés de calculer la valeur numérique des coefficients sans passer par l'intermédiaire de ces développements.

Nous avons vu que les coefficients pouvaient se mettre sous la forme d'intégrales définies. Telles sont les intégrales (1) et (2) des n^{os} 280 et 289

$$-4\pi^2 B_{mm'} = \int\int \frac{dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}, \tag{1}$$

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}\, dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}. \tag{2}$$

On pourrait donc calculer les valeurs de ces intégrales doubles par quadratures mécaniques; nous pouvons écrire en effet l'équation (2) sous la forme

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')}\, du\, du', \tag{3}$$

ou bien encore sous la forme

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{1}{\Delta} E^{-i(ml+m'l')}\, dl\, dl', \tag{4}$$

d'où l'on tirerait les formules approchées

$$n^2 A_{mm'} = \sum \frac{QE^{\Omega}}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')} \tag{3 bis}$$

et

$$(4\ bis) \qquad n^2 A_{mm'} = \sum \frac{1}{\Delta} E^{-i(ml+m'l')}.$$

Dans la formule (3 *bis*), il faut donner, sous le signe $\sum$, à u de même qu'à u', les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Cela fera donc, sous le signe $\sum$, des termes dont le nombre sera n^2, puisqu'il faut combiner les n valeurs de u avec les n valeurs de u'.

Pour la formule (4 *bis*), on opérera de la même manière avec cette différence que ce n'est plus à u et à u', mais bien à l et à l' qu'il faut donner les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Le Verrier voulant calculer la grande inégalité Pallas-Jupiter, c'est-à-dire le coefficient A_{18-7}, a employé la formule (4 *bis*). Il aurait pu se servir avec plus d'avantage de la formule (3 *bis*). Mais il fallait la puissance de calcul de Le Verrier pour avoir le courage d'aborder une tâche aussi écrasante. Heureusement il y a des moyens d'éviter ces quadratures mécaniques, ou tout au moins de réserver les quadratures mécaniques pour le calcul, non plus d'une intégrale double, mais d'une intégrale simple. Les plus importantes de ces méthodes sont celles de Hansen, de Cauchy et de Jacobi.

301. **Méthode de Hansen.** — Il s'agit d'obtenir les coefficients $B_{mm'}$ du développement procédant suivant les anomalies excentriques. Il sera aisé ensuite de passer aux coefficients $A_{mm'}$ du développement suivant les anomalies moyennes en employant la formule du n° **240**, ou bien encore de passer au développement spécial de Hansen en employant la formule du n° **246**.

Prenons alors l'expression de Δ^2; c'est un polynome du second degré en $E^{\pm iu}$, $E^{\pm iu'}$, de sorte que nous pouvons écrire

$$(5) \qquad \Delta^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} + CE^{2iu'} + C'E^{-2iu'},$$

les coefficients A, B et C dépendant seulement de u; nous verrons ensuite que l'on a simplement

$$C = C' = \frac{a'^2 e'^2}{4},$$

de sorte que C et C' sont indépendants de u et, de plus, du second degré par rapport aux excentricités. Nous pouvons en conséquence négliger ces termes en première approximation et, appelant Δ_0^2 la somme des trois premiers termes du second membre de (5) et R la somme des deux derniers, écrire

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\frac{R}{\Delta_0^3} + \frac{3}{8}\frac{R^2}{\Delta_0^5} - \ldots. \tag{6}$$

La série (6) converge très rapidement à cause de la petitesse de R, de sorte que le développement de $\frac{1}{\Delta}$ est ramené à celui de $\frac{1}{\Delta_0}, \frac{1}{\Delta_0^3}, \ldots.$

Or nous pouvons poser

$$\Delta_0^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} = H^2[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(u' - \beta)],$$

H, α et β étant des fonctions de u. On en déduit

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = \frac{1}{H^{2s}} \sum b_s^{(k)} E^{ik(u'-\beta)}, \tag{7}$$

les $b_s^{(k)}$ étant les coefficients de Laplace formés en fonctions de α par les procédés du Chapitre XVII.

A, B, B' peuvent être regardées comme des fonctions connues de u; il en est donc de même de H, α et β et, par conséquent, des $b_s^{(k)}$; on aura alors

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = \sum C_{hk} E^{i(ku'+hu)}$$

si C_{hk} est le coefficient de E^{ihu} dans le développement de

$$\frac{1}{H^{2s}} b_s^{(k)} E^{-ik\beta},$$

c'est-à-dire si

$$2\pi C_{hk} = \int_0^{2\pi} \frac{du}{H^{2s}} b_s^{(k)} E^{-i(k\beta+hu)}. \tag{8}$$

On calculera l'intégrale (8) par quadratures mécaniques à l'aide de la formule

$$C_{hk} = \sum \frac{b_s^{(k)} E^{-i(k\beta+hu)}}{H^{2s}}, \tag{9}$$

où n est un grand nombre; la fonction qui figure sous le signe $\sum$ est une fonction de u; on y donnera successivement à u les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Telle est la méthode de Hansen; je me bornerai à renvoyer pour plus de détails au Chapitre XXI du Tome IV de la *Mécanique céleste* de Tisserand et en particulier aux pages 341 à 344.

302. Méthode de Jacobi. — Jacobi cherche aussi à former le développement qui procède suivant les anomalies excentriques; il décompose aussi Δ^2 en deux parties Δ_0^2 et R, dont la seconde est du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons; mais il n'a pas recours aux quadratures mécaniques. Sa manière de mettre Δ^2 sous la forme

$$\Delta_0^2 + R$$

n'est d'ailleurs pas la même que celle de Hansen. Pour bien la faire comprendre, je suppose d'abord que l'inclinaison soit nulle. On trouve alors, en appelant ξ, η et ξ', η' les coordonnées des deux planètes,

$$\Delta^2 = (\xi + i\eta - \xi' - i\eta')(\xi - i\eta - \xi' + i\eta').$$

D'autre part, si l'on pose

$$e = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \qquad e' = \frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2},$$

il vient

$$\xi + i\eta = \frac{a E^{i\varpi}}{1+\varepsilon^2}(E^{iu} - 2\varepsilon + \varepsilon^2 E^{-iu}).$$

On en déduirait l'expression de $\xi - i\eta$ en changeant i et $-i$, et l'on aurait ensuite celles de $\xi' + i\eta'$, $\xi' - i\eta'$ en changeant a, ε, ϖ, u en a', ε', ϖ', u'.

Si, dans l'expression précédente, nous négligeons le terme en $\varepsilon^2 E^{-iu}$, nous commettrons une erreur du second degré et nous trouverons

$$\Delta_0^2 = (2b'\varepsilon' - 2b\varepsilon + bE^{iu} - b'E^{+iu'})(2b'_1\varepsilon' - 2b_1\varepsilon + b_1E^{-iu} - b'_1E^{-iu'})$$

en posant, pour abréger,

$$b = \frac{aE^{i\varpi}}{1+\varepsilon^2}, \qquad b' = \frac{a'E^{i\varpi'}}{1+\varepsilon'^2}, \qquad b_1 = \frac{aE^{-i\varpi}}{1+\varepsilon^2}, \qquad b'_1 = \frac{a'E^{-i\varpi'}}{1+\varepsilon'^2}.$$

Si alors nous désignons par Δ_0^2 cette valeur approchée de Δ^2 et par R l'erreur commise, nous aurons

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + R,$$

et R sera du second degré par rapport aux excentricités.

Si l'inclinaison n'est pas nulle, nous pourrons développer suivant les puissances de l'inclinaison et dans le développement ne figureront que des puissances *paires* de l'inclinaison.

Si donc nous négligeons l'inclinaison, l'erreur commise sera du second degré. Nous pourrons donc conserver la même expression pour Δ_0^2 et l'erreur $R = \Delta^2 - \Delta_0^2$ sera encore du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Nous pouvons écrire ensuite

$$\Delta_0^2 = H^2(1 - \gamma E^{i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{-i(u'-\omega')})(1 - \gamma E^{-i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{+i(u'-\omega')}),$$

en posant

$$H = \frac{a'}{1+\varepsilon'^2}, \qquad \gamma E^{-i\omega} = \frac{a}{a'}\,\frac{1+\varepsilon'^2}{1+\varepsilon^2}\,E^{i(\varpi-\varpi')} = \frac{b}{b'},$$

$$\gamma' E^{i\omega'} = 2\varepsilon' - 2\varepsilon\frac{b}{b'}.$$

Il est clair d'ailleurs que nous pourrions modifier les coefficients H, γ, ω, γ', ω', qui figurent dans Δ_0^2, pourvu que les modifications soient seulement du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. L'erreur R resterait du second degré.

Jacobi profite de cette latitude pour faire disparaître certains termes de R, à savoir les termes tout connus, les termes en

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(u-u'), \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u.$$

Je renverrai pour les détails de l'analyse à la *Mécanique céleste* de Tisserand (t. IV, Chap. XVIII, p. 301 à 306).

Quoi qu'il en soit, nous avons

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\frac{R}{\Delta_0^3} + \frac{3}{8}\frac{R^2}{\Delta_0^5} - \ldots,$$

de sorte que (R se réduisant à un nombre fini de termes) le développement de $\frac{1}{\Delta}$ est ramené à celui de $\frac{1}{\Delta_0^{2s}}$. Si nous posons, pour abréger,

$$E^{i(u-u'-\omega)} = z, \qquad E^{-i(u'-\omega')} = \varpi,$$

il vient

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = H^{-2s}(1-\gamma z-\gamma'\varpi)^{-s}(1-\gamma z^{-1}-\gamma'\varpi^{-1})^{-s},$$

et il s'agit d'effectuer le développement suivant les puissances entières, positives ou négatives de z et de ϖ.

Il est aisé de vérifier que le coefficient de $z^h\varpi^k$ sera, au facteur près $\gamma^h\gamma'^k$ et à un facteur constant près, une série hypergéométrique de deux variables de M. Appell par rapport à γ^2 et γ'^2.

Ces séries sont tout à fait analogues à celles que nous avons étudiées au Chapitre XVIII, seulement elles ne se réduisent pas à des polynomes.

Jacobi ne se sert pas de ces séries, qui n'étaient pas encore connues de son temps: son analyse est un peu différente; on la trouvera dans la *Mécanique céleste* de Tisserand (t. IV, p. 306 à 311).

Les coefficients du développement de $\frac{1}{\Delta_0}, \frac{1}{\Delta_0^3}, \frac{1}{\Delta_0^5}, \ldots$ sont liés par des relations de récurrence, et ces relations permettent de les exprimer tous à l'aide de quatre d'entre eux (de sorte qu'elles deviennent pratiquement utilisables). Il suffit, pour s'en convaincre, soit de se reporter à ce que nous avons dit au n° 264, soit d'appliquer les principes du Chapitre XXI, en remarquant qu'ici $\omega = 0$, $f = 1$ et que le polynome Δ_0^2 présente une symétrie particulière, puisqu'il ne change pas quand on change z en $\frac{1}{z}$ et ϖ en $\frac{1}{\varpi}$.

303. Méthode de Cauchy. — Cauchy, comme Jacobi et Hansen,

cherche d'abord le développement suivant les anomalies excentriques pour en déduire, par le moyen des fonctions de Bessel, le développement suivant les anomalies moyennes. Je n'ai pas à revenir sur le passage d'un développement à l'autre; je m'occuperai donc simplement de la manière d'obtenir le développement suivant les anomalies excentriques.

La méthode de Cauchy se rapproche également de celle de Hansen par un autre point. Cauchy commence par développer $\frac{1}{\Delta}$ suivant les anomalies excentriques de la seconde planète sous la forme

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{n'} E^{in'u'}.$$

Les $B_{n'}$ sont des fonctions de u et, si nous posons

$$B_{n'} = \sum B_{nn'} E^{inu},$$

il vient finalement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{nn'} E^{i(nu+n'u')}.$$

Cauchy calcule les coefficients $B_{n'}$ par des *procédés analytiques* et il en déduit ensuite les coefficients $B_{nn'}$ par *quadrature mécanique* à l'aide de l'intégrale

$$(10) \qquad 2\pi B_{nn'} = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inu}\, du.$$

La différence provient surtout de la manière d'obtenir les coefficients $B_{n'}$; reprenons la formule (5) :

$$(5) \qquad \Delta^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} + CE^{2iu'} + C'E^{-2iu'}.$$

Si nous égalons Δ^2 à o, nous obtiendrons une équation du quatrième degré en $y = E^{iu'}$ qui peut s'écrire

$$(11) \qquad A + By + \frac{B'}{y} + Cy^2 + C'y^{-2} = 0.$$

Discutons cette équation; nous observerons d'abord que ses coefficients ne sont pas réels, ou du moins A, C, C' sont réels, mais B et B' sont imaginaires conjugués; l'équation ne change pas quand

on change y en $\frac{1}{y}$ et i en $-i$. Les racines peuvent donc se répartir en deux paires :

$$\alpha^{\pm 1} E^{i\omega}, \quad \beta^{\pm 1} E^{i\omega'},$$

où α et β sont réels et plus petits que 1, de telle sorte qu'on permute les deux racines d'une même paire en changeant y en $\frac{1}{y}$ et i en $-i$. De plus,

$$C = C' = \frac{a'^2 e'^2}{4},$$

de sorte que le produit des racines est égal à $+1$, ce qui donne

$$\omega' = -\omega.$$

Il en résulte que nous pouvons mettre Δ^2 sous la forme d'un produit de deux facteurs :

$$\Delta^2 = H^2[1 - 2\alpha\cos(u' - \omega) + \alpha^2][1 - 2\beta\cos(u' + \omega) + \beta^2],$$

H étant facile à calculer quand on connaît α, β et ω.

Nous remarquerons ensuite que, si l'on néglige e'^2, le degré de l'équation s'abaisse, car C et C' s'annulent et l'équation (11) devient simplement

$$A + By + \frac{B'}{y} = 0.$$

L'équation du quatrième degré se réduit donc au deuxième, une des racines étant devenue nulle et l'autre infinie. L'équation se résout donc aisément pour $C = C' = 0$. Nous pouvons ensuite développer les racines suivant les puissances de C, en considérant A, B, B' et C comme des variables indépendantes et faisant $C' = C$. Comme C est du deuxième degré par rapport aux excentricités, la convergence sera très rapide. Nous voyons en même temps que β est une quantité du deuxième degré par rapport aux excentricités.

Il reste à effectuer le développement de $\frac{1}{\Delta}$ et pour cela on développera les deux facteurs

$$[1 - 2\alpha\cos(u' - \omega) + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c_p E^{ipu'},$$

$$[1 - 2\beta\cos(u' + \omega) + \beta^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c'_q E^{iqu'}.$$

On aura ensuite le coefficient $B_{n'}$ en faisant le produit des deux séries ; on trouve ainsi

$$(12) \qquad B_{n'} = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_p c_p c'_{n'-p}.$$

Les quantités

$$c_p E^{ip\omega}, \quad c'_q E^{-iq\omega}$$

ne sont pas autre chose que les coefficients de Laplace

$$b_{\frac{1}{2}}^{(p)}, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(q)},$$

calculés respectivement en prenant $\alpha = \alpha$ et $\alpha = \beta$. On les déterminera par les procédés du Chapitre XVII. Cauchy préfère employer, pour cette détermination, les séries procédant suivant les puissances de $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ $\left(\text{ou de } \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)$ particulièrement commodes dans le cas où p (ou q) sont grands, ce qui est le cas où il est placé.

Quant à la série

$$\sum c_p c'_{n'-p},$$

elle converge très rapidement à cause de la petitesse de β ; en effet, le développement de $c'_{n'-p}$ suivant les puissances de β commence par un terme en $\beta^{|n'-p|}$, donc $c'_{n'-p}$ est du degré $2|n'-p|$ par rapport aux excentricités et est par conséquent très petit.

Ayant calculé ainsi $B_{n'}$ par la formule (12), Cauchy aurait pu obtenir ensuite $B_{nn'}$ par la formule (10) et en déduire ensuite $A_{nn'}$ par la formule (12) du Chapitre XVI. Mais ce n'est pas tout à fait comme cela qu'il opère, il passe par l'intermédiaire d'un développement mixte procédant suivant l'anomalie excentrique u' et l'anomalie moyenne l :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum C_{nn'} E^{i(nl+n'u')},$$

de sorte que

$$B_{n'} = \sum C_{nn'} E^{inl},$$

$$2\pi C_{nn'} = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inl}\, dl = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inl}(1 - e\cos u)\, du.$$

Cauchy calcule $C_{nn'}$ à l'aide de cette dernière formule et pour cela il applique les quadratures mécaniques, c'est-à-dire qu'il prend (K étant un entier suffisamment grand)

$$KC_{nn'} = \sum B_{n'} E^{-inl}(1 - e\cos u),$$

$B_{n'}$ et E^{-inl} sont des fonctions de u; on donne à u sous le signe $\sum$ les K valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{K}, \quad \ldots, \quad \frac{2(K-1)\pi}{K}.$$

On calcule enfin $A_{nn'}$ à l'aide de la formule

$$A_{nn'} = \sum \frac{p'}{n'} C_{p,p'} J_{n'-p'}(n'e'),$$

analogue à la formule (12) du Chapitre XVI. Cauchy a appliqué cette méthode au calcul de la grande inégalité Pallas-Jupiter, en faisant $n = -18$, $n' = 7$, il n'avait donc à calculer que les fonctions de Bessel de l'argument unique $7e'$.

Je renverrai pour plus de détails à la *Mécanique céleste* de Tisserand, t. IV, Chap. XVII.

304. On pourrait évidemment fonder d'autres méthodes analogues sur les propriétés des fonctions elliptiques et sur l'emploi de formules, telles que celles dont nous avons fait usage au n° 256. Je me bornerai à cet égard à quelques indications sommaires. Supposons d'abord les excentricités nulles et que nous ayons à calculer, par exemple, l'intégrale

$$\int\int \frac{dz\, dw\, z^{-h} w^{-1}}{\sqrt{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) + C\left(w + \frac{1}{w}\right)}}, \tag{13}$$

où $A = a^2 + a'^2$, $B = aa'\nu$, $C = aa'\mu$. Intégrons d'abord par rapport à w; nous avons une intégrale elliptique que nous pouvons prendre par le procédé de la moyenne arithmético-géométrique. Ce procédé est fondé sur l'égalité

$$\int \frac{dw\, w^{-1}}{\sqrt{a + b\left(w + \frac{1}{w}\right)}} = \int \frac{dw\, w^{-1}}{\sqrt{a' + b'\left(w + \frac{1}{w}\right)}},$$

qui a lieu quand

$$\sqrt{a+2b}=\alpha, \qquad \sqrt{a-2b}=\beta; \qquad \sqrt{a'+2b'}=\alpha'=\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\sqrt{a'-2b'}=\sqrt{\alpha\beta}.$$

Si nous prenons l'intégrale qui donne le coefficient de Laplace

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^{0}=\int\frac{dw\,w^{-1}}{\sqrt{1+\alpha^2-\alpha\left(w+\frac{1}{w}\right)}},$$

les quantités qui jouent le rôle de $\sqrt{a+2b}$ sont

$$1+\alpha, \quad 1-\alpha;$$

en prenant les moyennes arithmétique et géométrique, on trouve

$$1, \quad \sqrt{1-\alpha^2};$$

en faisant une seconde fois la même opération,

$$\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}, \quad \sqrt[4]{1-\alpha^2};$$

une troisième fois,

$$\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2, \quad \ldots,$$

d'où

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^{0}=\int\frac{dw\,w^{-1}}{\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2}$$

ou

$$\sqrt{b_{\frac{1}{2}}^{0}}=\frac{2}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}},$$

ce qui est la formule du Chapitre XVII; nous avons vu quelle approximation donne cette formule quand α est plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Appliquons la même méthode à l'intégrale (13). Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\int\int\frac{z^{-h}w^{-1}\,dz\,dw}{\sqrt{a^2+a'^2+aa'\left(w+\frac{1}{w}\right)}},$$

en posant

$$A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) \pm 2C = (a \pm a')^2 = a'^2(1 \pm \alpha)^2,$$

en posant

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{\frac{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2C}{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) - 2C}},$$

$$2a' = \sqrt{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2C} + \sqrt{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) - 2C}.$$

Notre intégrale, par l'application de la règle précédente, se réduira donc à l'intégrale simple

$$\int \frac{8 i\pi z^{-h}\, dz}{a'(1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2})^2},$$

où a' et α sont des fonctions de z définies par les formules précédentes et que l'on pourra calculer par quadratures mécaniques, ou mieux de la manière suivante :

Comme B est très petit de l'ordre du carré de l'inclinaison, on pourra développer la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances de $B\left(z + \frac{1}{z}\right)$, ce qui nous donnera en même temps le développement de cette fonction suivant les puissances entières positives et négatives de z.

305. On pourrait faire quelque chose d'analogue dans le cas général; il s'agit toujours de calculer l'intégrale

$$\int\int \frac{dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

On commencera par exemple par intégrer par rapport à y; l'intégrale à calculer est alors une intégrale elliptique que je puis écrire

$$\int \frac{A y^{-m'}\, dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}},$$

et il faut calculer l'une des périodes de cette intégrale elliptique.

Seulement A, α, β, γ, δ sont des fonctions de x. Quand e' est nul, une des quatre racines α, β, γ, δ est nulle et une autre infinie. On est donc ramené au calcul de l'intégrale

$$\int \frac{y^m\,dy}{\sqrt{y(y-\gamma)(y-\delta)}}. \tag{14}$$

Le calcul des racines γ et δ est alors immédiat et l'on peut appliquer directement les procédés du Chapitre XVII et en particulier ceux du n° 256. Toutes les intégrales peuvent d'ailleurs se déduire de deux d'entre elles par les relations de récurrence du Chapitre XVII.

Si e' n'est pas nul, le cas est plus compliqué; il faut d'abord déterminer les racines α, β, γ, δ; nous avons expliqué au n° 303 comment cela pouvait se faire, grâce à la petitesse de e'. D'autre part, nous n'avons plus comme au Chapitre XVII à calculer l'intégrale

$$\int (\wp - e_3)^m\,du,$$

mais l'intégrale plus compliquée

$$\int \left(\frac{\wp - a}{\wp - b}\right)^m du, \tag{15}$$

où a et b sont des constantes et m un entier positif ou négatif. Et en effet, pour ramener l'intégrale (14) à la forme canonique, il faut poser

$$y = \frac{\wp - a}{\wp - b},$$

$\wp(u)$ étant la fonction de Weierstrass.

La période de l'intégrale (15) dépend de celles des quatre intégrales suivantes :

$$\int du, \quad \int \zeta'(u \pm u_0)\,du, \quad \int [\zeta(u + u_0) - \zeta(u + u_0)]\,du,$$

$$\int [\zeta(u + u_1) - \zeta(u - u_1)]\,du,$$

u_0 et u_1 étant définis par les équations

$$\wp(u_0) = a, \qquad \wp(u_1) = b.$$

On s'en assurerait en décomposant la fonction doublement périodique $\left(\frac{p-a}{p-b}\right)^m$ en éléments simples.

Or ces quatre intégrales ont pour périodes

$$2\omega_1, \quad 2\eta_1, \quad 4\eta_1 u_0, \quad 4\eta_1 u_1.$$

On a vu au n° 256 comment on pouvait calculer ω_1 et η_1 ; on trouvera dans l'excellent ouvrage de M. Schwarz (*Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques,* d'après les leçons de Weierstrass, Paris, Gauthier-Villars, 1894) des formules tout aussi convergentes pour le calcul de u_0 et de u_1 (pages 67 à 73).

On voit qu'ici les formules de récurrence permettent d'exprimer toutes les intégrales en fonction non plus de 2, mais de 4 d'entre elles.

D'autre part $2\omega_1$, $2\eta_1$, $4\eta_1 u_0$, $4\eta_1 u_1$ ne sont plus ici des constantes, mais des fonctions de x, et il faut maintenant les développer suivant les puissances entières, positives et négatives de x. Ce développement peut se faire, soit par quadrature mécanique, soit par des procédés analytiques ainsi que je l'ai expliqué à la fin du numéro précédent.

Nous remarquerons qu'il est préférable de faire la première intégration en prenant pour variable non pas y comme nous l'avons fait plus haut, mais $\frac{y}{x}$; il arrive alors que nos quantités ω_1, η_1, etc. varient peu quand on fait varier x, les variations étant de l'ordre des excentricités.

306. Seulement ce n'est pas la fonction perturbatrice elle-même qui figure dans les équations différentielles du mouvement; ce sont les dérivées partielles de cette fonction si l'on emploie la méthode de la variation des constantes; ce sont les composantes de la force perturbatrice avec d'autres méthodes.

Si nous avions les coefficients de développement de la fonction perturbatrice sous la forme analytique, il serait aisé d'en déduire les coefficients correspondants dans le développement des dérivées partielles, ou des composantes de la force. Mais il n'en est plus de même si nous possédons seulement la valeur numérique de ces

coefficients, et c'est là tout ce que nous donnent les méthodes exposées dans le présent Chapitre. Cela nous oblige à examiner la question à ce point de vue nouveau.

Pas de difficulté en ce qui concerne la dérivée partielle suivant l'une des anomalies moyennes l ou l'. Si l'on a

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

on trouve immédiatement

$$\frac{d}{dl}\frac{1}{\Delta} = \sum im A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}.$$

Pour les autres dérivées partielles, il s'agit (α étant l'un quelconque des éléments) de calculer

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\Delta} = \frac{P}{\Delta^3}$$

où

$$P = -\frac{1}{2}\frac{d\Delta^2}{d\alpha}.$$

Si l'on veut les composantes de la force suivant trois axes rectangulaires, on aura à développer

$$\frac{\xi-\xi'}{\Delta^3}, \quad \frac{\eta-\eta'}{\Delta^3}, \quad \frac{\zeta-\zeta'}{\Delta^3},$$

en désignant par ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' les coordonnées rectangulaires des deux planètes.

Dans la méthode de Hansen (*voir* Tisserand, t. IV, Chap. XXI, p. 341) on considère les composantes de la force suivant trois axes particuliers et l'on est amené à envisager les combinaisons

$$\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\xi'^2-\eta'^2-\zeta'^2}{\Delta^3}, \quad \frac{\zeta-\zeta'}{\Delta^3}.$$

Dans tous les cas, il s'agit de développer une expression de la forme $\frac{P}{\Delta^3}$, et $\frac{1}{\Delta}$ est encore de la même forme en faisant $P = \Delta^2$. Ce qui nous intéresse c'est que, quand on développe P suivant les anomalies excentriques, c'est-à-dire suivant les puissances entières, positives et négatives de x et de y, ce développement ne contiendra qu'un nombre fini de termes.

Cela est vrai des coordonnées ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' et par conséquent

de leurs combinaisons

$$\xi-\xi', \quad \eta-\eta', \quad \zeta-\zeta', \quad \sum\xi^2-\sum\xi'^2.$$

Cela est vrai de Δ^2 et par conséquent de $\frac{d\Delta^2}{d\alpha}$.

Il faudra donc opérer de la façon suivante :

1° On développera $\frac{1}{\Delta^3}$ suivant les anomalies excentriques. Les méthodes des numéros précédents qui visaient particulièrement $\frac{1}{\Delta}$ s'appliquent sans changement à $\frac{1}{\Delta^{2s}}$ et en particulier à $\frac{1}{\Delta^3}$.

2° On multipliera le développement de $\frac{1}{\Delta^3}$ par celui de P.

Ce dernier développement se réduisant à un nombre fini de termes, cette multiplication ne présente aucune difficulté.

3° On passera du développement de $\frac{P}{\Delta^3}$ suivant les anomalies excentriques à celui de cette même quantité suivant les anomalies moyennes à l'aide de la formule (12) du Chapitre XVI.

Une dernière observation toutefois. Les dérivées $\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\Delta}$, $\frac{\partial\Delta^2}{\partial\alpha}$ dont nous venons de parler et que l'on rencontre dans la méthode de la variation des constantes, sont les dérivées prises par rapport à un système de variables parmi lesquelles figurent les anomalies moyennes.

Désignons au contraire par $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, avec des ∂ ronds, les dérivées prises par rapport à un système de variables parmi lesquelles figurent les anomalies excentriques. Nous avons immédiatement Δ^2 et il est aisé d'en déduire $\frac{\partial\Delta^2}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\Delta}$; mais ce qu'il nous faut c'est $\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\Delta}$. Tout d'abord, si l'élément α n'est pas l'une des deux excentricités e ou e', on a simplement

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\Delta}=\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\Delta}.$$

Si $\alpha=e$, $l=u-e\sin u$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{\Delta}=\frac{d}{de}\frac{1}{\Delta}+\frac{d}{dl}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial l}{\partial e}=\frac{d}{de}\frac{1}{\Delta}+\sin u\frac{d}{dl}\frac{1}{\Delta}.$$

Nous connaissons le développement de $\frac{1}{\Delta}$ et de $\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{\Delta}$. Il reste donc à trouver celui de $\sin u \frac{d}{dl}\frac{1}{\Delta}$.

Soit donc

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')} = \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}$$

avec

$$A_{mm'} = \sum CA_{pp'}; \qquad C = \frac{pp'}{mm'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e'),$$

il viendra

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{\Delta} = \sum \frac{\partial P_{pp'}}{\partial e} E^{i(pu+p'u')} = \sum D_{mm'} E^{i(ml+m'l')}$$

avec

$$D_{mm'} = \sum C \frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}.$$

D'autre part

$$\frac{d}{de}\frac{1}{\Delta} = \sum \frac{dA_{mm'}}{de} E^{i(ml+m'l')}$$

avec

$$\frac{dA_{mm'}}{de} = \sum C \frac{\partial B_{pp'}}{\partial e} + \sum B_{pp'} \frac{dC}{de}.$$

Il reste donc

$$\sin u \frac{d}{dl}\frac{1}{\Delta} = \sum G_{mm'} E^{i(ml+m'l')}$$

avec

$$G_{mm'} = \sum B_{pp'} \frac{dC}{dc}$$

et

$$\frac{dC}{de} = \frac{pp'}{m'} J'_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

La formule précédente est analogue à la formule (12) du Chapitre XVI. Nous connaissons $B_{pp'}$ et $\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}$; les formules précédentes nous permettent d'en déduire $A_{mm'}$, $D_{mm'}$, $G_{mm'}$ et par conséquent le développement de $\frac{d}{de}\frac{1}{\Delta}$ suivant les anomalies moyennes.

CHAPITRE XXIII.

TERMES D'ORDRE ÉLEVÉ.

307. On peut être amené à rechercher une valeur approchée du coefficient $A_{mm'}$ quand m et m' sont des entiers très grands en valeur absolue et cela pour deux raisons :

1° On peut se rendre compte ainsi de la rapidité de la convergence des séries;

2° Un terme d'ordre élevé $A_{mm'}$ peut donner lieu à une perturbation notable si, le rapport des moyens mouvements n et n' étant sensiblement commensurable, le diviseur $mn + m'n'$ devient très petit. Le coefficient de la perturbation de la longitude est alors de l'ordre de

$$\frac{A_{mm'}}{(mn + m'n')^2},$$

et il convient alors de calculer le coefficient $A_{mm'}$ sans avoir besoin des coefficients précédents. Le plus souvent, une fois ce calcul terminé, on reconnaîtra qu'il était inutile, parce que la valeur trouvée pour $A_{mm'}$ est trop petite. Il y a donc intérêt à se faire d'*avance* une idée de l'ordre de grandeur de ces coefficients, et même à pouvoir en trouver rapidement une valeur approchée. C'est ce but qu'on peut espérer atteindre par l'emploi de la méthode de M. Darboux pour le calcul des fonctions de très grands nombres. Cette méthode repose sur les principes suivants :

1° Si une série

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n$$

est convergente dans un cercle de rayon ρ', et que sur la circonférence de ce cercle elle possède un point singulier z_0, tel que dans le voisinage de ce point la fonction $\varphi(z)$ soit développable suivant

les puissances entières, *réelles croissantes* et d'ailleurs fractionnaires ou même incommensurables, positives ou négatives, de $1 - \frac{z}{z_0}$, de telle façon que le premier terme du développement dont l'exposant ne soit pas entier soit

$$A\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-s},$$

on aura approximativement pour n très grand

$$a_n = \frac{A}{z_0^n} \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)};$$

2° Si le point singulier est logarithmique, c'est-à-dire si $\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \log\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)\varphi_2(z),$$

$\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ étant développables suivant les puissances réelles et croissantes de $1 - \frac{z}{z_0}$, il faudra opérer de la façon suivante. Soient s_1 et s_2 les exposants du premier terme du développement de φ_1 et de φ_2 dont l'exposant n'est pas entier. Soit s_0 l'exposant du premier terme de φ_2, les exposants entiers n'étant pas exclus. Si $s_1 < s_0$, on pourra appliquer la formule précédente en changeant s en s_1. Si $s_1 \geqq s_0$, il faudra envisager le premier terme de φ_2

$$A_0\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-s_0}.$$

Si s_0 n'est pas entier négatif, on a approximativement

$$a_n = \frac{A_0}{z_0^n} \frac{n^{s_0-1}\log n}{\Gamma(s_0)},$$

et, si s_0 est entier négatif ou nul,

$$a_n = \frac{A_0}{z_0^n}(-1)^{s_0+1}\Gamma(1 - s_0)n^{s_0-1};$$

3° Si la fonction $\varphi(z)$ présente plusieurs points singuliers sur la circonférence du cercle de convergence, la valeur approximative de a_n sera la somme des valeurs approximatives partielles que l'on obtiendrait en considérant isolément les divers points singuliers;

4° Supposons que $\varphi(z)$ soit de la forme

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n + \sum b_n z^{-n},$$

et que cette série double converge dans une couronne comprise entre les deux cercles $|z| = \rho_1$, $|z| = \rho_0$, $\rho_1 > \rho_0$. Alors la série $\sum a_n z^n$ convergera pour $|z| < \rho_1$ et ne présentera aucun point singulier sur le cercle $|z| = \rho_0$ ni à l'intérieur. Au contraire la série $\sum b_n z^{-n}$ convergera pour $|z| > \rho_0$ et ne présentera aucun point singulier sur le cercle $|z| = \rho_1$ ni à l'extérieur. La valeur asymptotique de a_n s'obtiendra d'après les règles précédentes en envisageant les points singuliers de $\varphi(z)$ sur le cercle $|z| = \rho_1$; celle de b_n s'obtiendra d'après les mêmes règles en envisageant les points singuliers de $\varphi(z)$, ou plutôt de $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ sur le cercle $|z| = \rho_0$.

308. Comment ces principes peuvent-ils s'appliquer au problème qui nous occupe? Il semble d'abord qu'ils sont faits uniquement pour les fonctions d'une seule variable. Aussi M. Flamme a-t-il commencé par décomposer le terme à évaluer en une somme dont chaque élément était le produit de deux facteurs dépendant chacun d'une seule variable, qui était l'anomalie moyenne de la première planète pour le premier facteur et celle de la seconde pour le second facteur.

Mais on peut opérer d'une autre manière. Soit

$$m = an + b, \qquad m' = cn + d, \tag{1}$$

a, b, c, d sont des entiers finis et donnés une fois pour toutes; n est un entier très grand; a et c sont premiers entre eux. Il faut calculer

$$A_{mm'} = A_{an+b,\, cn+d}.$$

Nous avons

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int \frac{E^{\Omega} Q \, dx \, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

avec

$$\Omega = \frac{me}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m'e}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Soit

$$\Omega = n\Omega_0 + \Omega_1,$$

$$\Omega_0 = \frac{ae}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{ce'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$\Omega_1 = \frac{be}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{de'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Notre intégrale deviendra

$$(2) \qquad \int\int \left(\frac{E^{\Omega_0}}{x^a y^c}\right)^n \frac{E^{\Omega_1} Q\, dx\, dy}{x^b y^d \sqrt{R(x, y)}}.$$

Considérons la fonction auxiliaire

$$\Phi(z) = -4\pi^2 \sum z^n A_{mm'}.$$

Sous le signe $\sum$ nous ne donnons pas à m et m' toutes les valeurs, mais seulement celles qui sont de la forme (1); mais nous pouvons encore opérer de deux manières :

1° Nous pouvons donner à n toutes les valeurs entières *positives,* outre la valeur *zéro;* nous obtenons ainsi l'*intégrale de Féraud*

$$(3) \qquad \Phi(z) = \int\int \frac{E^{\Omega_1} Q\, dx\, dy}{\left(1 - \frac{z E^{\Omega_0}}{x^a y^c}\right) x^b y^d \sqrt{R}};$$

2° Nous pouvons donner à n toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles; la fonction $\Phi(z)$ peut alors se mettre sous la forme d'une intégrale simple. Nous pouvons trouver deux entiers α et γ tels que

$$a\alpha + c\gamma = 1,$$

puisque a et c sont premiers entre eux. Posons alors

$$E^{il} = z^\alpha t^{-c}, \qquad E^{il'} = z^\gamma t^a.$$

Nous avons le développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')} = \sum A_{mm'} z^{\alpha m + \beta m'} t^{am' - cm}.$$

Considérons alors l'intégrale simple

$$(4) \qquad \int \frac{1}{\Delta} t^{bc-ad-1} z^{-(\alpha b+\gamma d)} \, dt$$

prise le long de la circonférence $|t| = 1$. Cette intégrale peut s'écrire

$$\sum A_{mm'} z^{\lambda} \int t^{\mu} \, dt,$$

où

$$\lambda = \alpha(m - b) + \beta(m' - d),$$
$$\mu = a(m' - d) - c(m - b) - 1.$$

L'intégrale $\int t^{\mu} dt$ est nulle à moins que $\mu = -1$ et alors elle est égale à $2i\pi$; pour que $\mu = -1$, il faut que m et m' soient de la forme (1); mais alors on a $\lambda = n$; de sorte que l'intégrale (4) se réduit à

$$2i\pi \sum A_{mm'} z^n = \frac{1}{2i\pi} \Phi(z).$$

Ainsi, pour résoudre le problème qui nous occupe, nous n'avons qu'à rechercher la position et la nature des points singuliers de la fonction $\Phi(z)$, et pour éviter toute confusion nous distinguerons la fonction $\Phi_1(z)$ de M. Féraud définie par l'intégrale double (3) et la fonction $\Phi_2(z)$ définie par l'intégrale simple (4).

309. Appliquons ces principes au calcul des coefficients de Laplace qui sont donnés par la formule

$$2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{-s} z^{k-1} \, dz,$$

avec

$$F = (1 - \alpha z)\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right).$$

Considérons d'abord s comme fixe et faisons croître k, il s'agit de trouver le coefficient de z^k dans le développement de F

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s}\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}.$$

Cette fonction présente deux points singuliers, l'un sur le cercle extérieur à la couronne de convergence, $z = \frac{1}{\alpha}$, l'autre sur le

cercle intérieur, $z=\alpha$; si nous supposons k positif et très grand, c'est le premier qu'il faut considérer.

Dans le voisinage de ce point, on a sensiblement

$$F^{-s}=(1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha^2)^{-s},$$

ce qui nous donne asymptotiquement

$$b_s^{(k)}=\frac{1}{\Gamma(s)}\alpha^k(1-\alpha^2)^{-s}k^{-s}.$$

Supposons maintenant k fixe et s très grand; soit

$$s=n+\frac{1}{2}.$$

Alors $2i\pi b_s^{(k)}$ sera le coefficient de β^n dans le développement de l'intégrale

$$\int\frac{z^{k-1}\,dz}{\left(1-\frac{\beta}{F}\right)\sqrt{F}}.$$

Les points singuliers de la fonction sous le signe $\int$ nous sont donnés par

$$F=0,\qquad F=\beta.$$

Il faut ou que ces deux équations aient une racine commune, ce qui donnerait $\beta=0$, solution à rejeter, ou que l'une d'elles ait une racine double. Nous pouvons exclure la première qui ne dépend pas de β; il reste la seconde, qui a une racine double si

$$z=\pm 1,\qquad \beta=(1\pm\alpha)^2.$$

La racine qui convient c'est $(1-\alpha)^2$.

Quelle est la nature de ce point singulier? Pour β très voisin de $(1-\alpha)^2$, les parties les plus importantes de l'intégrale seront celles qui correspondent aux valeurs de z voisines de 1. On a alors sensiblement $z=1$, $\sqrt{F}=1-\alpha$, de sorte que l'intégrale s'écrira sensiblement

$$\int\frac{(1-\alpha)\,dz}{1+\alpha^2-\beta-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)}.$$

La fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle dont il

faut obtenir le résidu; or ce résidu est

$$\frac{1-\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{z^2}-1\right)},$$

z étant donné par l'équation

$$1+\alpha^2-\beta=\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Mais cette équation donne sensiblement

$$z=1\pm\sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}},$$

$$\frac{1}{z^2}=1\pm 2\sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}}.$$

Le résidu est donc

$$\frac{(1-\alpha)\sqrt{\alpha}}{2\alpha\sqrt{(1-\alpha)^2-\beta}},$$

et l'intégrale est égale à ce résidu multiplié par $2i\pi$. Donc $b_s^{(k)}$ est le coefficient de β^n dans le développement de

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[1-\frac{\beta}{(1-\alpha)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)^{2s-1}}\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

formule qui, on le remarquera, est indépendante de k.

310. La détermination des points singuliers de la fonction $\Phi(z)$ ne présente pas de difficulté; on n'a qu'à appliquer aux intégrales (3) et (4) les procédés du n° 282. Pas de difficulté non plus en ce qui concerne la nature de ces points singuliers, je me bornerai à renvoyer aux *Méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 322.

La difficulté provient de ce fait que tous les points singuliers ne conviennent pas et n'appartiennent pas à la branche considérée de la fonction $\Phi(z)$. Nous avons vu en effet aux n^{os} 282 et 283 quelle

est la condition pour qu'une singularité de la fonction $\Phi(z)$ convienne. Cette singularité se présente quand deux points singuliers de la fonction sous le signe $\int$ se confondent et, pour que la singularité convienne, il faut que ces deux points singuliers soient, avant de se confondre, de part et d'autre du contour d'intégration.

Les points singuliers qui conviennent sont dits *admissibles* et il nous faut choisir, si nous adoptons l'intégrale (3), celui des points singuliers admissibles dont le module est le plus petit, et, si nous adoptons l'intégrale (4), celui des points singuliers admissibles dont le module est le plus voisin de 1.

La discussion pour reconnaître l'admissibilité des points singuliers est assez délicate et a été jusqu'ici le principal obstacle à l'emploi de cette méthode. J'ai indiqué dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* les principes généraux qui permettent de faire cette discussion. Mais je n'ai appliqué ces principes qu'au cas où l'inclinaison est nulle, l'une des excentricités nulle et l'autre très petite. M. Hamy, dans le *Journal de Liouville* (1894 et 1896), a traité le même problème sans s'astreindre à la troisième condition. M. Coculesco, dans sa thèse, 1895, s'est occupé du cas où l'inclinaison est nulle, les deux excentricités petites et différentes de *zéro* et où la longitude du périhélie est la même. Enfin M. Féraud, dans sa thèse, 1897, a traité le cas où l'inclinaison est finie et les deux excentricités nulles; il a d'ailleurs retrouvé les résultats de M. Hamy.

Il semble d'abord que la discussion doive être plus facile avec l'intégrale simple (4) qu'avec l'intégrale double (3); il n'en est rien, à moins que l'une des deux excentricités ne soit nulle, parce que la fonction sous le signe $\int$ n'est pas une fonction uniforme de t, mais possède une infinité de déterminations, de sorte que la discussion ne pourrait se faire que par la considération d'une surface de Riemann à une infinité de feuillets. Aussi, M. Féraud, en introduisant l'intégrale (3), a-t-il réalisé un sérieux progrès. Mais il faudrait faciliter la discussion des intégrales doubles et pour cela étudier les propriétés de leurs périodes. Nous avons déjà vu aux Chapitres XX et XXI l'importance que pourrait avoir cette étude.

Si, au lieu d'envisager le développement suivant les anomalies

moyennes, on envisageait le développement suivant les anomalies excentriques, le problème serait considérablement simplifié. On reconnaîtrait, par exemple, que la fonction $\Phi(z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à second membre dont les coefficients et le second membre sont des fonctions rationnelles de z.

Je n'insisterai pas davantage sur cette question, me bornant à renvoyer aux Mémoires cités et en particulier au Chapitre VI des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

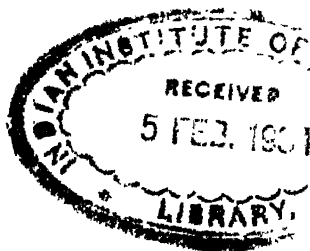
PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS.

TOME II. — II^e PARTIE.

THÉORIE DE LA LUNE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE XXIV.

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DE LA LUNE.

311. La théorie de la Lune doit être exposée en deux parties; dans la première partie, on cherche quel serait le mouvement de la Lune, si la Lune, le Soleil et la Terre existaient seuls et étaien, réduits à des points matériels; dans la seconde partie, on cherche comment ce mouvement est troublé par l'attraction des planètes et par l'influence de l'aplatissement terrestre.

La première partie n'est donc qu'un cas particulier du problème des trois corps, et la difficulté ne provient que de la grandeur relativement considérable des perturbations produites. Le rapport de la force perturbatrice à l'attraction du corps central est, comme nous l'avons vu au Chapitre II (p. 57), de l'ordre de

$$\frac{m_4}{m_7}\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right)^3,$$

m_4 étant la masse du corps troublant, m_7 celle du corps central AC et BC les distances mutuelles des trois corps. Ce rapport est le produit de deux facteurs dont l'un est le rapport des masses et l'autre le cube du rapport des distances. Dans le cas des planètes, le premier facteur est très petit, et le second fini ; dans le cas de la Lune, au contraire, le premier facteur est grand et le second très petit. Il en résulte que le produit des deux facteurs est petit sans

doute, sans quoi le problème ne pourrait se résoudre par approximations successives, mais beaucoup moins petit que dans le cas des planètes, de sorte que l'approximation est beaucoup plus lente.

La difficulté et l'importance du problème ont amené un grand nombre de géomètres à s'en occuper et l'étude de leurs recherches est extrêmement intéressante au point de vue historique; on en lira avec profit l'exposé dans le Tome III de la *Mécanique céleste*, de Tisserand. Mais aujourd'hui on peut dire qu'il n'y a plus que trois méthodes qui comptent : celle de Hansen, celle de Delaunay et celle de Hill-Brown.

Celle de Hansen est celle qui a servi à construire les Tables actuellement en usage. Ces Tables sont d'une exactitude remarquable et, si elles s'écartent des observations, les divergences ne sont pas dues à un défaut de la méthode (au moins tant qu'on ne considère que le Soleil, la Terre et la Lune), puisque les autres méthodes, plus satisfaisantes au point de vue théorique, semblent devoir conduire aux mêmes divergences, mais à l'omission de quelque terme provenant de l'action des planètes ou à quelque cause inconnue. Cette méthode est toutefois très compliquée et je renonce à l'exposer ici, renvoyant soit aux Ouvrages originaux de Hansen, soit au résumé qu'on trouvera au Chapitre XVII du Tome III de Tisserand. Le succès de Hansen paraît dû surtout à son habileté et à sa patience personnelles, et aussi à ce fait qu'il a cherché directement les valeurs numériques des coefficients sans passer par une expression algébrique où les constantes seraient représentées par des lettres.

Delaunay a fait tout le contraire, tous ses coefficients sont exprimés par des séries où figurent les différentes constantes du mouvement de la Lune et dont les coefficients sont des nombres rationnels exactement déterminés. Ces formules sont donc applicables, non seulement à la Lune, mais à un satellite quelconque (en le supposant unique). Il suffirait d'y substituer, au lieu des constantes relatives à la Lune, celles qui se rapporteraient à ce satellite. Il serait aisé également de voir immédiatement quelle serait l'influence d'une correction apportée à l'un des éléments de la Lune. La détermination des nombres rationnels qui servent de coefficients a exigé un travail énorme; si M. Andoyer a découvert

quelques erreurs, c'est seulement dans les termes d'ordre très élevé, et qui n'entrent pas en ligne de compte avec l'approximation habituelle des Tables. Ce travail algébrique est resté longtemps inutilisé et c'est seulement tout dernièrement qu'il a été réduit en nombres.

Brown a pris une position intermédiaire. Ses coefficients ne sont ni purement numériques comme ceux de Hansen, ni purement analytiques comme ceux de Delaunay. Ils se présentent sous forme de séries procédant suivant les puissances des divers éléments, le rapport des moyens mouvements excepté; les coefficients de ces séries sont calculés numériquement, mais ces coefficients ne sont plus des nombres rationnels, ce sont des fonctions du rapport des moyens mouvements, qu'on pourrait également développer en séries, mais dont on se borne à déterminer la valeur numérique. Comme, d'autre part, la méthode de Brown était beaucoup plus directe que les autres, il a pu pousser l'approximation beaucoup plus loin que ses devanciers.

La méthode que nous exposerons ici est celle de Brown avec quelques modifications; c'est elle, en effet, qui nous permet le mieux d'utiliser les résultats obtenus dans le Tome I et de rattacher ainsi la théorie de la Lune à la théorie générale du problème des trois corps.

312. Nous adopterons les notations du Chapitre II, Tome I, et nous renverrons en particulier au n° 42. Nous désignerons donc par

$m_1 = m_2 = m_3$ la masse de la Lune,
$m_4 = m_5 = m_6$ la masse du Soleil,
$m_7 = m_8 = m_9$ la masse de la Terre;

par

$x_1, \quad x_2, \quad x_3$ les coordonnées de la Lune,
$x_4, \quad x_5, \quad x_6$ les coordonnées du Soleil,
$x_7, \quad x_8, \quad x_9$ les coordonnées de la Terre;

par A, B, C les positions des trois corps : Lune, Soleil, Terre, par D le centre de gravité du système Lune, Terre; par

$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3$ les trois projections du vecteur AC,
$x'_4, \quad x'_5, \quad x'_6$ » BD.

Nous poserons

$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7},$$

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt};$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_1}{m'_1} + \frac{y'^2_2}{m'_2} + \frac{y'^2_3}{m'_3}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_4}{m'_4} + \frac{y'^2_5}{m'_5} + \frac{y'^2_6}{m'_6}\right),$$

de sorte que T_1 représente la force vive de la Lune dans son mouvement relatif par rapport à la Terre, en lui attribuant fictivement la masse m'_1, tandis que T_2 représente la force vive du Soleil dans son mouvement relatif par rapport au point D, en lui attribuant fictivement la masse m'_4.

Nous poserons en outre (*voir* t. I, p. 55)

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 = -\frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

$$F = T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_3 = \Phi_0 + m'_1 \Phi_1 \quad (^1),$$

$$\Phi_0 = T_2 + U_2, \qquad m'_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

Nous avons vu que U_3 est comparable au $\frac{1}{100}$ de T_1 et de U_1 et au $\frac{1}{10000000}$ de T_2 et de U_2, ce qui nous permet de négliger U_3 devant Φ_0.

313. Les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}. \tag{1}$$

Si nous faisons $i = 4, 5, 6$, nous voyons que les dérivées de

---

(1) Je trouve plus avantageux de poser

$$F = \Phi_0 + m'_1 \Phi_1,$$
$$y' = m'_1 y''$$

au lieu de

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$
$$y' = m_1 y'',$$

comme au Tome I.

$T_1 + U_1$ sont nulles, que celles de U_3 sont négligeables devant celles de Φ_0, de sorte qu'il reste

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6), \tag{2}$$

ce qui prouve que le mouvement du Soleil par rapport au point D peut être regardé comme képlérien.

Si nous faisons $i = 1, 2, 3$, les dérivées de Φ_0 sont nulles et il reste

$$\frac{dx'_i}{dt} = m'_1 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m'_1 \frac{d\Phi_1}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Les seconds membres des équations (3) dépendent encore de x'_4, x'_5, x'_6; mais ces quantités étant déterminées par les équations (2) peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps. Si on les remplace alors par leurs valeurs en fonctions du temps, les équations (3) se présentent sous la forme canonique, mais de telle façon que la fonction caractéristique Φ_1 dépende explicitement du temps (comme au n° **12**).

D'autre part, si l'on veut éviter la présence du petit facteur m_1, il suffit de poser comme au n° **121** (t. I, p. 162) :

$$y'_i = m'_1 y''_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les équations (3) restent canoniques et deviennent

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dy''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx'_i}. \tag{3 bis}$$

314. Il faut maintenant appliquer les principes des Chapitres X et XII. Les résultats en ont été résumés en particulier au n° **177**. On y voit que les éléments osculateurs peuvent être développés suivant les puissances de μ et des expressions

$$E_k \cos w'_k, \qquad E_k \sin w'_k, \tag{4}$$

suivant les cosinus et les sinus des multiples des arguments w'', les coefficients des développements dépendant encore de n constantes d'intégration W_i (s'il y a $n+1$ corps).

Les E sont des constantes d'intégration de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. Les arguments w' et w'' varient propor-

tionnellement au temps, et l'on a

$$w'_k = -\gamma'_k t + \varpi'_k, \qquad w''_i = n'_i t + \varpi_i;$$

les ϖ et les ϖ' sont des constantes d'intégration; les n' et les γ' sont des constantes développables (*cf.* n° 179) suivant les puissances de μ et des E^2.

Nous avons vu ensuite au n° 192 que les coordonnées héliocentriques (ici géocentriques), c'est-à-dire x'_1, x'_2, x'_3, sont développables de la même manière, et qu'il en est encore de même de y'_1, y'_2, y'_3. Les développements prennent d'ailleurs la forme (*cf.* t. I, p. 327)

$$(5) \qquad \sum A\,\Pi(E^q) \mathop{}^{\cos}_{\sin} \left(\sum k w'' + \sum p w'\right),$$

les q, les k et les p étant des entiers et l'on a

$$(6) \qquad \sum k - \sum p = 0$$

dans les développements de x'_3, x'_6, y'_3, y'_6.

$$(7) \qquad \sum k - \sum p = 1$$

dans ceux de x'_1, x'_2, x'_4, x'_5, y'_1, y'_2, y'_4, y'_5 (*cf.* n^os 116, 162, 187 et 192, p. 328).

Nous n'avons que des cosinus dans les développements de

$$x'_1, \quad x'_3, \quad x'_4, \quad x'_6, \quad y'_2, \quad y'_5.$$

Nous n'avons au contraire que des sinus dans ceux de

$$x'_2, \quad x'_5, \quad y'_1, \quad y'_3, \quad y'_4, \quad y'_6$$

(*cf.* n° 190 et aussi n° 192).

Le nombre des arguments w' est de 4; celui des arguments w'' de 2 (n° 193). Mais l'un des moyens mouvements γ'_4 est nul et w'_4 se réduit à une constante. Si d'ailleurs on prend le plan invariable pour plan des $x_1 x_2$, on a $E_4 = 0$, de sorte que l'argument w'_4 ne figure plus dans les développements et qu'il ne reste plus que cinq arguments :

$$(8) \qquad \begin{cases} w'_1, & w''_1, \\ w'_2, & w''_2, \\ w'_3. \end{cases}$$

Une nouvelle simplification provient de ce fait que la masse de la Lune étant très petite, le mouvement du Soleil par rapport au point D peut être regardé comme képlérien. Le plan invariable que nous avons pris pour plan des $x_1 x_2$ n'est alors autre chose que le plan de l'orbite solaire. D'autre part w'_3, qui n'est autre chose, au signe près, que la longitude du périhélie de l'orbite solaire képlérienne, se réduit à une constante, et il ne nous reste plus que quatre arguments distincts : w'_1, w'_2, w''_1, w''_2, dont il est aisé d'apercevoir la signification : w''_1 est la longitude moyenne de la Lune, je ne veux pas dire la longitude moyenne sur l'orbite osculatrice, mais pour ainsi dire la longitude moyenne moyenne; w''_2, c'est la longitude moyenne du Soleil; $-w'_1$, c'est la longitude *moyenne* du périgée lunaire; $-w'_2$, c'est la longitude *moyenne* du nœud.

De même E_1 est une constante qui joue un rôle analogue à l'excentricité lunaire; E_2 joue le rôle de l'inclinaison; E_3 joue le rôle de l'excentricité solaire, et nous pouvons même profiter de l'indétermination de cette constante E_3 pour supposer qu'elle est précisément égale à cette excentricité solaire.

Dans les développements de

$$x'_1, \quad x'_2, \quad y'_1, \quad y'_2,$$

l'exposant de E_2 et le coefficient de w'_2 seront toujours pairs. Ils seront toujours impairs, au contraire, dans ceux de

$$x'_3, \quad y'_3$$

(*cf.* n° 191).

Si $E_3 = 0$, c'est-à-dire si l'orbite solaire est supposée circulaire, nos développements ne dépendent plus de w'_3, mais de l'argument

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1 + p_2 w'_2,$$

où l'expression

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2$$

est égale à zéro pour les distances mutuelles et pour x'_3, et à 1 pour x'_1 et x'_2.

Si de plus l'inclinaison est nulle, c'est-à-dire si $E_2 = 0$, les termes dépendant de w'_2 disparaissent; on a donc $x'_3 = 0$, et dans les distances mutuelles des trois corps figure seulement l'argument

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1,$$

où

$$p_1 = k_1 + k_2.$$

Elles dépendent alors seulement des deux arguments

$$\varpi''_1 + \varpi''_2, \qquad \varpi''_2 + \varpi'_1,$$

et elles sont développables suivant les puissances de

$$E_1 \cos(\varpi''_2 + \varpi'_1), \quad E_1 \sin(\varpi''_2 + \varpi'_1).$$

C'est le cas du problème restreint.

Si nous revenons à l'hypothèse $E_2 \gtrless 0$, $E_3 = 0$, l'intégrale de Jacobi a encore lieu.

315. Nous avons posé plus haut (n° 312) :

$$m_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3;$$

nous ferons d'abord observer :

1° Que U_3 est beaucoup plus petit que $T_1 + U_1$;

2° Que T_1 et U_1 dépendent seulement des masses m_1 et m_7 et des coordonnées de la Lune, c'est-à-dire des inconnues $x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3$;

3° Que U_3 dépend en outre de la masse m_4 du Soleil et des coordonnées du Soleil, qui sont des fonctions connues du temps et des éléments de l'orbite solaire.

D'autre part, comme AC est beaucoup plus petit que BD, on a (*cf.* t. I, p. 55) :

$$(9) \qquad U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1 + m_7)^n} P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}},$$

P_n étant une fonction de l'angle des deux directions AC et BD, fonction définie Tome I, page 49, et la série (9) convergeant très rapidement.

Nous voyons comment U_3 dépend des masses et des éléments du Soleil.

1° Il est proportionnel à m_4;

2° $\frac{U_3}{m'_1}$ ne dépend que du rapport $\frac{m_1}{m_7}$;

3° U_3 dépend en outre des éléments de l'orbite terrestre, à savoir : de la longitude du périhélie $-\varpi'_3$, qui est une constante ; de la longitude moyenne du Soleil $-\varpi''_2$, qui varie proportionnellement au temps ; de l'excentricité solaire, que j'ai désignée plus haut par E_3, et enfin du demi grand axe de l'orbite solaire que je désignerai par a'.

Voyons comment chacun des termes de la série (9) dépend de a'. La distance AC ne dépend que des coordonnées de la Lune, le facteur P_n dépend d'un angle ; il ne dépendra donc pas de a', mais seulement des autres éléments du Soleil. Quant à BD^{n+1}, c'est la puissance $n+1^{\text{ième}}$ d'une longueur, il sera donc proportionnel à a'^{n+1}. Le rapport $\frac{a'}{BD}$ sera indépendant de a'. Nous pouvons donc écrire

$$(10) \qquad U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1+m_7)^n} P_n AC^n \left(\frac{a'}{BD}\right)^{n+1} \frac{1}{a'^{n+1}},$$

et comme tous les facteurs sauf le dernier sont indépendants de a', nous aurons le développement de U_3 suivant les puissances décroissantes de a'. Le premier terme du développement (10) est

$$-m_4 \frac{m_1 m_7}{m_1+m_7} P_2 AC^2 \left(\frac{a'}{BD}\right)^3 \frac{1}{a'^3},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$\frac{U_3}{m'_1} = \frac{m_4}{a'^3} \sum Q_n \frac{1}{a'^n},$$

Q_n étant indépendant de m_4 et de a'.

Le facteur $\frac{m_4}{a'^3}$ est petit, c'est lui qui joue le rôle de μ. D'ailleurs a' est une constante et notre fonction perturbatrice se trouve développée en une série très convergente procédant suivant les puissances de $\frac{1}{a'}$. Cette constante $\frac{1}{a'}$ pourrait donc aussi jouer le rôle de μ ; de sorte qu'en appliquant les principes précédents, nous trouverions que nos inconnues peuvent se développer suivant les puissances de

$$\frac{m_4}{a'^3} \quad \text{et de} \quad \frac{1}{a'}.$$

D'autre part, la troisième loi de Kepler nous donne

$$(m_7 + m_4) = a'^3 n_2^2,$$

d'où

$$\mu = \frac{m_4}{a'^3} = n_2^2 \frac{1}{1 + \frac{m_7}{m_4}}.$$

Le second facteur est une constante connue; elle est si voisine de l'unité que nous pouvons prendre simplement

$$\mu = n_2^2.$$

Il semble donc que nous devions conclure que nos coordonnées vont être développables suivant les puissances de n_2^2 et de $\frac{1}{a'}$. Mais avant d'adopter cette conclusion, il convient d'y regarder de plus près. Φ_1 et U_2 dépendent de n_2 de deux manières :

1° Directement, à cause du facteur $\mu = \frac{m_4}{a'^3}$ qui affecte U_3;

2° Indirectement, parce que U_3 dépend en outre de w''_2, qui est égal à $n_2 t$.

Pour pouvoir appliquer les principes du Chapitre X, il faut regarder n_2 (en tant qu'il entre par w''_2) et μ comme deux variables indépendantes. Dans ces conditions, nos développements procéderont suivant les puissances de μ, mais les coefficients seront des fonctions des différentes constantes et en particulier de n_2. Or nous avons vu que les intégrations introduisent des petits diviseurs de la forme $k_1 n_1 + k_2 n_2$; l'un de ces petits diviseurs est précisément n_2.

Considérons donc un terme quelconque du développement dépendant de ce petit diviseur qui est n_2; soit α l'exposant de μ et β celui du petit diviseur, de telle façon que notre terme contienne en facteur

$$\mu^\alpha n_2^{-\beta} = n_2^{2\alpha-\beta}.$$

L'expression $\alpha - \frac{\beta}{2}$ représente ce que nous avons appelé la *classe* du terme, et nous avons démontré au n° 198 que cette classe était toujours positive ou nulle.

L'exposant $2\alpha - \beta$ de n_2 ne peut donc pas être négatif, mais il n'y a pas de raison pour qu'il soit pair.

Ce n'est donc pas suivant les puissances de n_2^2 *et de* $\frac{1}{a'}$ *que nos développements procèdent, mais suivant celles de* n_2 *et de* $\frac{1}{a'}$. Nous verrons dans la suite, à la fin du Chapitre XXVIII, qu'il peut même, mais seulement pour des termes d'ordre très élevé, s'introduire de petits diviseurs en n_2^2 ou n_2^3. Il en résulte que n_2 pourra, dans certains termes du développement, figurer à une *puissance négative*.

316. Nous trouvons donc finalement

$$x' = f(m_1, m_7, m_4; n_1, E_1, E_2; \varpi''_1, \varpi'_1, \varpi'_2; a', E_3, \varpi''_2, \varpi'_3).$$

Nos coordonnées dépendent en effet des trois masses, des quatre arguments ϖ''_1, ϖ''_2, ϖ'_1, ϖ'_2; des deux constantes d'intégration E_1 et E_2 introduites plus haut; d'une troisième constante pour laquelle nous pouvons choisir le moyen mouvement n_1; des éléments de l'orbite solaire a', E_3 et ϖ'_3.

Nous pouvons remplacer m_4 par $a'^3 n_2^2$ et introduire une nouvelle constante a définie par

$$m_1 + m_7 = n_1^2 a^3.$$

Alors m_1 et m_7 sont des fonctions de $\frac{m_1}{m_7}$ et de $n_1^2 a^3$, de sorte que nous pouvons écrire

$$x' = f\left(\frac{m_1}{m_7}, a, n_1, E_1, E_2, \varpi''_1, \varpi''_2, \varpi'_1, \varpi'_2, a', n_2, E_3, \varpi'_3\right).$$

Il faut faire intervenir maintenant des considérations d'homogénéité :

a et a' sont des longueurs, de même que les x';

$\frac{1}{n_1}$ et $\frac{1}{n_2}$ sont des temps;

les E sont des nombres, ou du moins on peut profiter de l'indétermination de leur définition pour le supposer;

$\frac{m_1}{m_7}$ et les ϖ sont des nombres.

Dans ces conditions, pour que la formule soit indépendante

des unités de longueur et de temps, on doit avoir

$$x' = a\,f\left(\frac{n_2}{n_1}, \frac{a}{a'}\right).$$

Je n'écris pas explicitement celles des variables qui sont des nombres. Nous poserons

$$\frac{n_2}{n_1} = m', \qquad \frac{a}{a'} = \alpha,$$

et comme nos expressions sont développables suivant les puissances de n_2 et de $\frac{1}{a'}$, nous voyons qu'elles le seront suivant les puissances de m' et de α; la constante m est le rapport des moyens mouvements; α est ce qu'on appelle la *parallaxe*.

On aura d'abord, en différentiant par rapport au temps,

$$y''_i = \frac{m'_1}{m_1}\frac{dx'_i}{dt} = \frac{1}{1+\frac{m_1}{m_7}}\frac{dx'_i}{dt},$$

et, par conséquent, par raison d'homogénéité,

$$y''_i = n_2 a\,f\left(\frac{n_2}{n_1}, \frac{a}{a'}\right) = n_2 a\,f(m', \alpha),$$

et, d'autre part,

$$\Phi_1 = n_1^2 a^2 f\left(m', \alpha; \frac{x'_i}{a}, \frac{y''_i}{n_1 a}; \frac{m_1}{m_7}; \mathrm{E}_3, \varpi''_2, \varpi'_3\right).$$

317. Il convient encore de faire quelques remarques au sujet de la symétrie. Nos développements procèdent suivant les puissances de

$$m', \quad \alpha, \quad \mathrm{E}_1 \frac{\cos}{\sin}\varpi'_1, \quad \mathrm{E}_2 \frac{\cos}{\sin}\varpi'_2, \quad \mathrm{E}_3 \frac{\cos}{\sin}\varpi'_3,$$

et l'argument du terme général est

$$k_1\varpi''_1 + k_2\varpi''_2 + p_1\varpi'_1 + p_2\varpi'_2 + p_3\varpi'_3.$$

On a $\sum k - \sum p = 0$ pour x'_3 et $= 1$ pour x'_1 et x'_2. D'ailleurs p_3 est pair pour x'_1 et x'_2 et impair pour x'_3; d'où il suit que

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2$$

est toujours impair. D'autre part, p_3 est toujours de même parité que l'exposant de E_3; donc $k_1 + k_2 - p_1 - 1$ est toujours de parité opposée à cet exposant.

Soit maintenant q_0 l'exposant de la parallaxe α; nous voyons que la position du Soleil ne change pas quand on change

$$a', \quad \varpi''_2, \quad \varpi'_3$$

en

$$-a', \quad \varpi''_2 + \pi, \quad \varpi'_3 + \pi.$$

Dans ce cas, les coordonnées du Soleil ne changeant pas, rien ne doit changer puisque, dans nos équations, a', ϖ''_2, ϖ'_3 ne s'introduisent que par les coordonnées du Soleil.

Or, dans ces conditions, un terme quelconque se trouve multiplié par

$$(-1)^{q_0 + k_2 + p_3};$$

on doit donc avoir

$$q_0 + k_2 + p_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

D'autre part nous avons trouvé

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_3 \equiv 1$$

pour les trois coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, et par conséquent

$$k_1 + p_1 + q_0 \equiv 1.$$

Pour les distances mutuelles nous aurions trouvé

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2 - p_3 = 0, \qquad p_2 \equiv 0,$$

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_3 \equiv 0,$$

d'où

$$k_1 + p_1 + q_0 \equiv 0.$$

Un peu plus loin (n° 320) nous poserons

$$x = \quad x'_1 \cos \varpi_2 + x'_2 \sin \varpi_2,$$

$$y = - x'_1 \sin \varpi_2 + x'_2 \cos \varpi_2.$$

On voit que si k_2 est pair dans le développement de x'_1 et x'_2, il sera impair dans celui de x et y et inversement. On aura donc, pour x et y,

$$q_0 + k_2 + p_3 \equiv 1,$$

et pour les termes indépendants de α et de E_3, c'est-à-dire si

$q_0 = p_3 = 0$, on aura

$$k_2 \equiv 1.$$

318. Nous allons donner une formule importante pour ce qui va suivre, et, pour l'établir, nous reproduirons à peu près le raisonnement du n° 120, en nous appuyant sur le théorème du n° 16. D'après ce théorème, si l'on a un système d'équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx},$$

et si les x et les y sont supposés exprimés en fonctions des constantes d'intégration α et du temps t, on a l'identité

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum A\,d\alpha - F\,dt,$$

où Ω est défini par l'équation

$$\frac{d\Omega}{dt} = F + \sum x\frac{dy}{dt} = F - \sum x\frac{dF}{dx},$$

et où les A sont indépendants du temps et dépendent seulement des α.

Ici nous avons les équations (3 *bis*)

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dy''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx'_i}.$$

Elles sont bien de la forme canonique, mais Φ_1 dépend non seulement des inconnues x' et y'', mais encore du temps, ce qui nous oblige à appliquer l'artifice du n° 12. Si Φ_1 dépend explicitement du temps, c'est par l'intermédiaire des coordonnées du Soleil, qui elles-mêmes sont des fonctions périodiques de l'argument w''_2. Nous introduirons donc deux variables auxiliaires u et v.

Nous pouvons écrire Φ_1 sous la forme

$$\Phi_1(x', y''; w''_2),$$

et poser

$$F' = \Phi_1(x', y''; u) + n_2 v.$$

Nous avons alors, si nous voulons que $u = w''_2 = n_2 t + \varpi_2$,

$$\frac{du}{dt} = n_2 = \frac{dF'}{dv},$$

et nous pouvons écrire les équations canoniques

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dF'}{dy''}, & \dfrac{dy''}{dt} = -\dfrac{dF'}{dx'}, \\[2mm] \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dF'}{dv}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dF'}{du}. \end{cases}$$

Nous ajoutons arbitrairement la quatrième équation qui peut être regardée comme la définition de v. Nous poserons d'ailleurs, pour unifier les notations,

$$w_1 = w''_1, \qquad w_2 = w''_2,$$
$$w_3 = w'_1, \qquad w_4 = w'_2,$$

et, d'autre part,

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

ce qui ne change pas la définition de n_1, n_2, ϖ_1 et ϖ_2.

Les équations restent canoniques et F' ne dépend plus explicitement du temps; nous pouvons donc écrire

$$(12)\qquad \sum x'\,dy'' + u\,dv = d\Omega + \sum A\,d\alpha - F'\,dt.$$

Mais

$$F'\,dt = (\Phi_1 + n_2 v)\,dt = \Phi_1\,dt + v(du - d\varpi_2),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(13)\qquad \sum x'\,dy'' = d(\Omega - uv) + \sum A\,d\alpha - \Phi_1\,dt + v\,d\varpi_2.$$

Quelles sont nos constantes d'intégration α? Nous avons d'abord m', E_1 et E_2, que nous appellerons les constantes β; nous avons ensuite les constantes ϖ qui figurent dans les arguments w.

Le système (11) étant du huitième ordre, il y a une huitième constante, mais nous n'avons pas à nous en inquiéter, car elle n'entre que dans la variable parasite v. C'est la constante K qui figure dans le second membre de l'équation

$$n_2 v + \Phi_1 = K.$$

Quant aux autres constantes, ce sont celles du Soleil, elles doivent être regardées comme connues et non comme des constantes d'intégration. Parmi les sept constantes que nous conservons, nous distinguerons les ϖ et les trois autres (m', E_1, E_2) que nous

appellerons les β. Je puis écrire alors, en distinguant les coefficients de ces deux sortes de constantes,

$$\sum x' \, dy'' = d(\Omega - uv) + \sum A \, d\varpi + \sum B \, d\beta - \Phi_1 \, dt + v \, d\varpi_2,$$

et en posant

$$\Omega' = \Omega - uv,$$

nous arrivons à la formule

$$(14) \qquad \sum x' \, dy'' = d\Omega' + \sum A \, d\varpi + \sum B \, d\beta - \Phi_1 \, dt + v \, d\varpi_2.$$

La fonction Ω' se trouve alors définie à une fonction arbitraire près des constantes β et ϖ, par l'équation

$$(15) \qquad \frac{d\Omega'}{dt} = \Phi_1 + \sum x' \frac{dy''}{dt}.$$

Le second membre est une fonction des constantes β et des arguments w, périodique par rapport aux w.

Désignons par H la valeur moyenne de cette fonction périodique, ce sera une fonction des β seulement. Nous pourrons alors supposer que

$$\Omega' = Ht + \Omega'',$$

Ω'' étant une fonction des β et des w, périodique par rapport aux w. La valeur moyenne de cette fonction périodique peut être choisie arbitrairement puisque Ω' n'est définie qu'à une fonction arbitraire près des constantes, nous la supposerons nulle. Dans ces conditions Ω'' est fonction seulement des β et des w.

Nous poserons alors comme au n° 129

$$(16) \qquad \sum x' \, dy'' - d\Omega'' = \sum W_i \, dw_i + \sum C_i \, d\beta_i,$$

et nous reconnaîtrons que les W et les C sont des fonctions des β et des w, périodiques par rapport aux w. Nous avons donc l'identité suivante en rapprochant les équations (14) et (16)

$$(17) \qquad \sum W \, dw + \sum C \, d\beta - d(Ht) = \sum A \, d\varpi + \sum B \, d\beta - \Phi_1 \, dt + v \, d\varpi_2.$$

Cette équation doit devenir une identité quand on y remplace w_i

par $n_i t + \varpi_i$. Alors notre relation (17) peut s'écrire

$$\sum W(n\,dt + t\,dn + d\varpi) + \sum C\,d\beta - H\,dt - t\,dH$$
$$= \sum A\,d\varpi + \sum B\,d\beta - \Phi_1\,dt + v\,d\varpi_2,$$

d'où, en identifiant les coefficients des diverses différentielles,

$$(18)\quad \begin{cases} \Phi_1 = H - \sum W n, \\ W_i = A_i \qquad (i \lessgtr 2), \\ W_2 = A_2 + v, \\ t\sum W\dfrac{dn}{d\beta} + C = B + t\dfrac{dH}{d\beta}. \end{cases}$$

Discutons les équations (18) et appliquons-leur les lemmes des nos 108 et suivants. Si nous prenons d'abord l'équation $W_i = A_i$, nous voyons que le premier membre doit être une fonction des β et des w, périodique par rapport aux w, et que le second doit être une fonction des β et des ϖ. D'ailleurs cette équation doit devenir une identité quand on y remplace w par $nt + \varpi$. Cela n'est possible que si W_i et A_i sont fonctions des β seulement (pour $i = 1$, 3 ou 4).

Si nous prenons maintenant la dernière équation (18), nous verrons que le premier membre se compose d'une fonction C périodique des w, et d'une autre fonction périodique des w multipliée par t; et le second membre d'une fonction B des β et des ϖ et d'une autre fonction des β multipliée par t. L'identité n'est possible que si l'on a séparément

$$\sum W\frac{dn}{d\beta} = \frac{dH}{d\beta},$$
$$C = B = \text{fonction des } \beta.$$

On aura donc

$$(19)\qquad \sum W\,dn = dH,$$

et, en rapprochant de la première équation (18),

$$(20)\qquad d\Phi_1 = -\sum n\,dW.$$

Nous remarquerons que dans la somme $\sum W\,dn$, le terme $W_2\,dn_2$

ne figure pas, puisque n_2 est une constante donnée et que par conséquent $dn_2 = 0$.

Nous avons dit que W_1, W_3, W_4 dépendent seulement des β, voyons ce que nous pouvons dire de W_2, nous avons l'équation

$$W_2 = A_2 + v,$$

où W_2 est une fonction des β et des w périodique par rapport aux w, où

$$n_2 v = K - \Phi_1,$$

K étant notre huitième constante, tandis que Φ_1 est une fonction des β et des w, périodique par rapport aux w; quant à A_2, c'est une fonction des huit constantes β, ϖ et K. Nous avons donc l'identité

$$n_2 W_2 + \Phi_1 = n_2 A_2 + K, \tag{21}$$

dont le premier membre est fonction des β et des w, périodique en w, et le second membre fonction des β, de K et des ϖ. L'identité n'est possible que si les membres sont fonctions des β seulement. J'écrirai alors la première équation (18) sous la forme

$$(n_2 W_2 + \Phi_1) + n_1 W_1 + n_3 W_3 + n_4 W_4 = H,$$

où chaque terme du premier membre et le second membre sont fonctions des β seulement.

Nous avons vu plus haut que quelques-unes de nos coordonnées sont des fonctions paires et d'autres des fonctions impaires des arguments

$$w''_1, \quad w''_2, \quad w'_1, \quad w'_2, \quad w'_3.$$

Le dernier de ces arguments w'_3 est une constante que l'on peut regarder comme donnée une fois pour toutes; nous pouvons la supposer nulle, ce qui revient à prendre pour l'axe des x_1 le grand axe de l'orbite terrestre. Dans ces conditions nos coordonnées seront des fonctions paires ou impaires des quatre arguments

$$w_1 = w''_1, \qquad w_2 = w''_2, \qquad w_3 = w'_1, \qquad w_4 = w'_2.$$

Les fonctions suivantes seront paires :

$$x'_1, \quad x'_3, \quad y''_2, \quad \frac{dx'_2}{dt}, \quad \frac{dy''_1}{dt}, \quad \frac{dy''_3}{dt}, \quad \Phi_1, \quad \frac{d\Omega'}{dt},$$

$$H, \quad W, \quad A, \quad v, \quad n, \quad x'\frac{dy''}{dt}, \quad x'\frac{dy''}{dw}, \quad \frac{d\Omega'}{dw}.$$

Les suivantes seront impaires :

$$x'_2,\quad y''_1,\quad y''_3,\quad \frac{dx'_1}{dt},\quad \frac{dx'_3}{dt},\quad \frac{dy''_2}{dt},$$

$$\Omega',\quad \Omega'',\quad \text{C},\quad \text{B},\quad x'y'',\quad x'\frac{dy''}{d\beta},\quad \frac{d\Omega'}{d\beta}.$$

Ce que je voulais faire remarquer, c'est que C devant être indépendant des w et en même temps fonction impaire des w, devra être nulle, de sorte que nous aurons simplement

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum \text{W}\,dw,$$

et à cause des équations (18) et (21)

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum \text{A}'_i\,dw_i - \frac{\Phi_1\,dw_2}{n_2}, \tag{22}$$

où l'on a posé

$$\text{A}'_i = \text{A}_i = \text{W}_i \qquad (i = 1, 3, 4),$$
$$\text{A}'_2 = \text{A}_2 + \frac{\text{K}}{n_2},$$

de telle façon que les A' dépendent seulement des β.

319. De la formule (22) on peut déduire une série de formules importantes, que nous écrirons sous la forme

$$\sum x'\frac{dy''}{d\beta} - \frac{d\Omega''}{d\beta} = 0,$$

$$\sum x'\frac{dy''}{dw_i} - \frac{d\Omega''}{dw_i} = \text{A}'_i \qquad (i = 1, 3, 4),$$

$$\sum x'\frac{dy''}{dw_2} - \frac{d\Omega''}{dw_2} = \text{A}'_2 - \frac{\Phi_1}{n_2},$$

et, en particulier, pour la constante m',

$$\sum x'\frac{dy''}{dm'} - \frac{d\Omega''}{dm'} = 0.$$

Mais, dans l'application de cette dernière formule, il faut faire attention à une chose; nous avons écrit plus haut (p. 12)

$$x' = af(m', \alpha), \qquad y'' = n_2 a f(m', \alpha),$$

où $\alpha = \frac{a}{a'}$. Il faut alors faire attention que x' et y'' dépendent de m', non seulement directement, mais par l'intermédiaire de a qui est fonction de m', et par l'intermédiaire de α qui est égal à $\frac{a}{a'}$.

320. Axes tournants. — On peut avoir un grand avantage à rapporter le système à des axes tournants autour de l'origine avec une vitesse angulaire n_2; ces avantages ressortent déjà de ce que nous avons dit plus haut au n° 313; nous avons vu en effet que lorsque $E_3 = 0$, les équations du mouvement se présentent sous une forme particulièrement simple en employant ce système d'axes.

Il serait facile d'établir les équations du mouvement par des procédés élémentaires, mais il sera préférable de rattacher la transformation aux principes du Chapitre I. Je reprends les équations (11) du n° 318; d'autre part, pour me rapprocher des notations de MM. Hill et Brown, je désigne par x, y, z les coordonnées de la Lune par rapport aux axes tournants, de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} x &= x'_1 \cos u + x'_2 \sin u, \\ y &= -x'_1 \sin u + x'_2 \cos u, \\ z &= x'_3. \end{aligned}$$

L'angle u est l'angle des axes mobiles avec les axes fixes; c'est donc $w_2 = w''_2 = n_2 t + \varpi_2$; la lettre u a donc la même signification qu'au n° 318; je poserai ensuite

$$\begin{aligned} y''_1 &= X \cos u - Y \sin u, \\ y''_2 &= X \sin u + Y \cos u, \\ y''_3 &= Z, \end{aligned}$$

et enfin

$$v' = v - (Xy - Yx).$$

Dans ces conditions on a

$$\begin{aligned} dx &= dx'_1 \cos u + dx'_2 \sin u + y\,du, \\ dy &= -dx'_1 \sin u + dx'_2 \cos u - x\,du, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\sum y''\,dx' + v\,du = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + v'\,du.$$

Le changement de variables est donc canonique et les équations (11) (p. 15) deviennent

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dF'}{dX}, & \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{dF'}{dx}, \\[2mm] \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dF'}{d\varphi'}, & \dfrac{d\varphi'}{dt} = -\dfrac{dF'}{du}, \end{cases}$$

avec les équations qu'on déduit des premières par permutations circulaires de x, y, z et de X, Y, Z.

On a d'ailleurs

$$F' = \frac{T_1 + U_1 + U_3}{m'_1} + n_2\varphi' + n_2(Xy - Yx),$$

$$T_1 = \frac{m'_1}{2}\sum y''^2 = \frac{m'_1}{2}\sum X^2$$

et les équations (23) nous auraient donné

$$\frac{dx}{dt} = X + n_2 y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y - n_2 x, \qquad \frac{dz}{dt} = Z,$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\Phi'_1}{dx}, \qquad \frac{du}{dt} = n_2,$$

en posant

$$\psi = \frac{U_1 + U_3}{m'_1} + n_2(Xy - Yx), \qquad \Phi'_1 = \psi + \frac{1}{2}\sum X^2 = F' - n_2\varphi'$$

Remarquons que nous avons

$$(24)\qquad \begin{cases} n_2(Xy - Yx) = n_2\left(\dfrac{dx}{dt}y - \dfrac{dy}{dt}x\right) - n_2^2(x^2 + y^2), \\[2mm] \dfrac{1}{2}\sum X^2 = \dfrac{1}{2}\sum\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - n_2\left(\dfrac{dx}{dt}y - \dfrac{dy}{dt}x\right) + \dfrac{n_2^2}{2}(x^2 + y^2), \\[2mm] \dfrac{1}{2}\sum X^2 + n_2(Xy - Yx) = \dfrac{1}{2}\sum\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - \dfrac{n_2^2}{2}(x^2 + y^2), \\[2mm] n_2(Xy - Yx) = n_2(y''_1 x'_2 - y''_1 x'_1). \end{cases}$$

La dernière des formules (24) nous fait connaître le sens du terme complémentaire $n_2(Xy - Yx)$; il représente, au facteur constant près n_2, la constante des aires dans le mouvement absolu.

Dans le cas où $E_3 = 0$, F′ ne dépend plus de x, y, z, X, Y, Z, et pas de u. On retrouve donc l'intégrale de Jacobi qui peut s'écrire

$$F' - n_2\varphi' = \frac{1}{2}\sum X^2 + \frac{U_1 + U_3}{m'} + n_2(Xy - Yx) = \text{const.},$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{U_1+U_3}{m'_1}-\frac{n_2^2}{2}(x^2+y^2)=\text{const.}$$

Nous trouvons ensuite

$$\sum y''\,dx'=\sum X\,dx-(Xy-Yx)\,du,$$

$$\sum y''x' \;=\sum Xx;$$

d'où

$$\sum x'\,dy''=\sum x\,dX+(Xy-Yx)\,du,$$

et, en rapprochant de la formule (22) et remarquant que $u=w_2$,

$$\sum x\,dX-d\Omega''=\sum A'_i\,dw_i-\frac{\Phi'_1\,dw_2}{n_2}, \tag{25}$$

en posant

$$\Phi'_1=\Phi_1+n_2(Xy-Yx)=F'-n_2v'.$$

D'autre part Ω'' est encore défini par

$$\frac{d\Omega''}{dt}=\Phi'_1+\sum x\frac{dX}{dt}-H, \tag{26}$$

H étant une constante choisie de telle façon que la valeur moyenne du second membre soit nulle. Il suffit en effet de se reporter à la formule (15) et de remarquer que

$$\sum x'\frac{dy''}{dt}=\sum x\frac{dX}{dt}+n_2(Xy-Yx).$$

321. **Choix des constantes.** — Il importe de comparer aux notations précédentes, celles qui ont été employées par Hansen, par Delaunay et par Brown. Delaunay emploie les arguments suivants :

$$\begin{aligned}
D &= w''_1-w''_2=w_1-w_2=\text{distance moyenne Lune-Soleil},\\
F &= w''_1+w'_2=w_1+w_4=\text{distance moyenne Lune-nœud},\\
l &= w''_1+w'_1=w_1+w_3=\text{anomalie moyenne Lune},\\
l' &= w''_2+w'_3 \qquad\qquad\;\; =\text{anomalie moyenne Soleil};
\end{aligned}$$

ou si $w'_3=0$, comme nous l'avons supposé, $l'=w''_2=w_2=u$. Hansen prend pour arguments :

$$g=w_1+w_3, \qquad g'=w_2,$$

$$\omega=w_1+w_4, \qquad \omega'=w_2.$$

Brown adopte les arguments de Delaunay, mais dans ses formules figurent plus habituellement les exponentielles imaginaires

$$\zeta = e^{iD}, \qquad \zeta^m = e^{il'}, \qquad \zeta^g = e^{iF}, \qquad \zeta^c = e^{il}.$$

Il faut aussi comparer comment sont notées les constantes qui correspondent à celles que nous avons désignées plus haut par a, m', E, E_2, E_3.

La constante E_3, excentricité du Soleil, est partout désignée par e'; le rapport des deux moyens mouvements que nous avons appelé m' est désigné par Delaunay par m. Au contraire, ce que Brown désigne par m, c'est le rapport

$$\frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{m'}{1 - m'} = \frac{\text{mouvement sidéral du Soleil}}{\text{mouvement synodique de la Lune}}.$$

Nous poserons comme lui

$$m = \frac{m'}{1 - m'};$$

il est aisé de voir que m' peut se développer suivant les puissances de m et que, par conséquent, toutes nos séries qui procèdent suivant les puissances de m' peuvent être développées suivant les puissances de m; la convergence s'en trouve même augmentée, on verra plus loin pourquoi.

Les constantes qui correspondent à a, E_1 sont désignées par Delaunay et Brown par a, e; mais elles sont définies d'une manière différente. Pour Brown a est le coefficient de $\zeta = e^{iD}$ dans le développement de $x + iy$, et par conséquent celui de $\cos D$ dans celui de x, ou plutôt a est défini de façon qu'il en soit ainsi, si l'on néglige E_1, E_2 et E_3; pour Delaunay, a est défini par l'égalité

$$m_1 + m_7 = n_1^2 a^3,$$

ce qui vaut mieux.

Delaunay définit e de telle façon que le terme principal de l'équation du centre ait même expression que dans le mouvement képlérien; pour Brown, au contraire, e est le coefficient de $a \sin l$ dans le développement de $x'_1 \sin \varpi_1 - x'_2 \cos \varpi_1$. Ici la différence est importante puisque le e de Brown est à peu près le double de celui de Delaunay.

La constante d'inclinaison qui correspond à E_3 est désignée

par γ par Delaunay et définie de telle façon que l'expression du terme principal de la latitude soit la même que dans le mouvement elliptique. Elle est désignée par K par Brown et définie comme le coefficient de $2a \sin F$ dans le développement de z.

On voit que toutes les définitions de Delaunay font jouer le premier rôle aux coordonnées polaires, et celles de Brown aux coordonnées rectangulaires. Ces différences n'ont aucune importance, et l'on pourrait faire varier les définitions de bien d'autres manières sans rien altérer d'essentiel.

322. Il importe de se rendre compte de la grandeur de ces différentes constantes. On a sensiblement

$$m = \frac{1}{12}, \qquad m' = \frac{1}{13}, \qquad e' = \frac{1}{60}, \qquad \text{K ou } \gamma = \frac{1}{20},$$

$$e = \frac{1}{10} \text{ (Brown) ou } \frac{1}{20} \text{ (Delaunay)}, \qquad \alpha = \frac{1}{400}.$$

Nos séries procèdent suivant les puissances de ces diverses quantités, mais il importe de remarquer que dans le coefficient d'un même cosinus, ou d'un même sinus, l'exposant de e, e', K, α est toujours de même parité, de sorte qu'en réalité nos séries procèdent suivant les puissances de

$$m = \frac{1}{12}, \qquad e^2 = \frac{1}{100} \text{ ou } \frac{1}{400}, \qquad K^2 = \frac{1}{400}, \qquad e'^2 = \frac{1}{3600},$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{160\,000}.$$

Aussi la convergence sera-t-elle beaucoup plus rapide par rapport aux excentricités et aux inclinaisons que par rapport à m qui joue le rôle du coefficient μ dans la théorie des planètes exposée au Tome I. C'est le contraire de ce qui arrive dans le cas des planètes. Aussi convient-il de développer, non pas d'abord par rapport à μ, puis par rapport aux excentricités, mais au contraire d'abord par rapport aux excentricités et ensuite par rapport à m. C'est là la différence essentielle entre la théorie de la Lune et celle des planètes.

CHAPITRE XXV.

LA VARIATION.

323. Nous commencerons par déterminer les termes qui sont d'ordre *zéro*, par rapport aux excentricités, à l'inclinaison et à la parallaxe, c'est-à-dire par rapport aux E et à α. Ces termes ne peuvent dépendre de w'_1, w'_2, w'_3; ils seront donc des termes en

$$\frac{\cos}{\sin}(k_1 w_1 + k_2 w_2).$$

Si nous adoptons les variables x, y, z du n° 320, nous verrons d'abord que z est nul puisque l'inclinaison est supposée nulle; d'autre part, d'après le n° 192, t. I, on a

$$k_1 = -k_2.$$

Ensuite, d'après le n° 190, t. I, x et Y ne contiennent que des cosinus, tandis que y et X ne contiennent que des sinus.

Enfin, d'après le n° 317, l'exposant de α étant nul, k_2 doit être impair. En résumé le terme général dans x et dans y sera respectivement en

$$\cos(2k+1)(w_1 - w_2), \qquad \sin(2k+1)(w_1 - w_2),$$

ou $\cos(2k+1)D$, $\sin(2k+1)D$, en introduisant l'argument D de Delaunay (*cf* n° 321).

Pour former les équations du problème, il faut reprendre les équations générales établies au n° 320 et y faire $\alpha = E_3 = 0$. Faire $\alpha = 0$, c'est négliger la parallaxe, c'est-à-dire réduire U_3 à son premier terme, ce qui donne

$$\frac{U_3}{m'_1} = -\frac{m_4}{a'^3} P_2 AC^2,$$

P_2 étant le polynome de Legendre

$$P_2 = \frac{3\cos^2\gamma - 1}{2}.$$

On a d'ailleurs, puisque $z = 0$,

$$AC^2 = x^2 + y^2,$$

et puisque BD est parallèle à l'axe des x (l'excentricité E_3 étant nulle et par conséquent le mouvement de B autour de D circulaire et uniforme), puisque par conséquent γ est l'angle de AC avec l'axe des x,

$$AC\cos\gamma = x,$$

d'où, finalement,

$$P_2 AC^2 = \frac{2x^2 - y^2}{2}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut au n° 320

$$F' - n_2 v' = \frac{X^2 + Y^2}{2} + \frac{U_1 + U_3}{m'_1} + n_2(Xy - Yx).$$

Rappelons d'autre part que

$$\frac{U_1}{m'_1} = -\frac{m_1 + m_7}{AC}, \qquad \frac{m_4}{a'^3} = n_2^2,$$

d'où

$$\frac{U_3}{m'_1} = -n_2^2 \frac{2x^2 - y^2}{2},$$

d'où enfin

$$F' = n_2 v' + \frac{X^2 + Y^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{AC} - n_2^2 \frac{2x^2 - y^2}{2} + n_2(Xy - Yx).$$

Comme F' ne dépend pas de u, la variable auxiliaire v' se réduit à une constante et ne joue aucun rôle, et les équations canoniques (23) du Chapitre précédent deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X + n_2 y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = Y - n_2 x, \\ \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{m_1 + m_7}{AC^3} x + 2n_2^2 x + n_2 Y, \\ \dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{m_1 + m_7}{AC^3} y - n_2^2 y - n_2 X. \end{cases}$$

Mais les deux premières équations nous montrent que

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - n_2\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} + n_2\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dX}{dt} - n_2 Y = \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_2\frac{dy}{dt} - n_2^2 x,$$

$$\frac{dY}{dt} + n_2 X = \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_2\frac{dx}{dt} - n_2^2 y.$$

de sorte que les dernières équations (1) deviennent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_2\frac{dy}{dt} - 3n_2^2 x + \frac{m_1+m_7}{AC^3}x = 0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2n_2\frac{dx}{dt} \qquad\qquad + \frac{m_1+m_7}{AC^3}y = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent être mises sous une autre forme; si nous posons

$$w_1'' - w_2'' = D = \tau,$$

cela revient à changer l'unité de temps de telle sorte que l'argument de Delaunay joue le rôle de temps. On a alors, d'après le n° **321**,

$$\frac{d\tau}{dt} = n_1 - n_2 = \frac{n_2}{m}.$$

Si alors nous posons

$$\varkappa = \frac{m_1+m_7}{(n_1-n_2)^2},$$

les équations deviendront

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} - 3m^2x + \frac{\varkappa x}{AC^3} = 0,\\ &\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} \qquad\qquad + \frac{\varkappa y}{AC^3} = 0.\end{aligned}\right.$$

Telle est la forme particulièrement simple que prennent les équations du mouvement de la Lune quand on néglige :

1° La parallaxe;
2° L'excentricité solaire;
3° L'inclinaison.

Le problème que nous proposons maintenant est de trouver une

solution particulière de cette équation; à savoir celle qui correspond au cas où la constante E_1 est nulle. Comme nous venons de voir que x et y sont développables suivant les cosinus et les sinus des multiples de $2D$, ou de 2τ, nous voyons que *cette solution particulière est une solution périodique*. Le problème a été entièrement résolu par Hill dans un Mémoire de tout premier ordre dont nous allons exposer les principaux résultats (*American Journal of Mathematics*, t. I).

324. Équations homogènes. — Ainsi que nous l'avons vu au Chapitre précédent ces équations admettent l'intégrale de Jacobi, qui s'écrit

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right]-\frac{3m^2}{2}x^2=\frac{\varkappa}{r}+C.$$

C'est d'ailleurs une combinaison immédiate des équations (3). Ici $r=\sqrt{x^2+y^2}$ désigne la distance AC.

Nous avons donc trois équations que je puis écrire en mettant x' et x'' pour $\frac{dx}{d\tau}$ et $\frac{d^2x}{d\tau^2}$, ce qui n'a plus d'inconvénient; nous obtenons ainsi

$$(4)\qquad \begin{cases} x''-2my'-3m^2x+\dfrac{\varkappa x}{r^3}=0,\\[2mm] y''+2mx'+\dfrac{\varkappa y}{r^3}=0,\\[2mm] \dfrac{x'^2+y'^2}{2}-\dfrac{3m^2}{2}x^2-\dfrac{\varkappa}{r}=C. \end{cases}$$

Entre ces trois équations nous allons éliminer $\varkappa$; nous trouverons

$$(5)\qquad \begin{cases} xx''+yy''+2m(yx'-xy')+\dfrac{1}{2}(x'^2+y'^2)-\dfrac{9m^2x^2}{2}=C,\\[2mm] yx''-xy''-2m(yy'+xx')-3m^2xy=0. \end{cases}$$

La première s'obtient en multipliant les trois équations (4) par x, y et 1, et la seconde en les multipliant par y, $-x$ et 0 et ajoutant.

On voit tout de suite que les premiers membres des équations (5) sont des polynomes homogènes du second degré par rapport à x, y et leurs dérivées.

325. Équations imaginaires. — Hill met encore ces équations sous une autre forme en introduisant les notations

$$u = x + iy, \qquad s = x - iy.$$

Elles deviennent alors

$$(6) \quad \begin{cases} us'' + u''s - 2mi(us' - su') + u's' - \dfrac{9m^2}{4}(u + s)^2 = 2C, \\ us'' - u''s - 2mi(us' + su') \qquad - \dfrac{3m^2}{2}(u^2 - s^2) = 0; \end{cases}$$

ces deux équations peuvent être remplacées par une seule

$$(7) \qquad us'' - 2mius' + \frac{u's'}{2} - \frac{m^2}{8}(15u^2 + 18us + 3s^2) = C,$$

à laquelle il convient d'adjoindre son imaginaire conjuguée

$$(8) \qquad u''s + 2misu' + \frac{u's'}{2} - \frac{m^2}{8}(15s^2 + 18us + 3u^2) = C.$$

Il est aisé de vérifier en effet que les deux équations (6) ne sont autre chose que la somme et la différence des équations (7) et (8).

326. Les équations (3) forment un système du quatrième ordre, elles conviennent pour l'étude des termes de degré *zéro* et pour les termes qui dépendent seulement de l'excentricité lunaire E_1, mais sont indépendants de l'inclinaison E_2, de la parallaxe α, et de l'excentricité solaire E_3. L'excentricité lunaire E_1 est l'une de nos constantes d'intégration; si nous la supposons nulle, il ne subsistera que les termes de degré *zéro*, que nous nous proposons actuellement d'étudier. L'ensemble de ces termes de degré *zéro* représente donc une solution particulière de nos équations (3); comme ces termes dépendent d'un seul argument $D = \tau$, ils sont périodiques.

Le problème revient donc à chercher une *solution périodique* des équations (3).

Si l'on construit la trajectoire T du point x, y *par rapport aux axes tournants*, cette trajectoire sera une courbe fermée, puisque x et y sont des fonctions périodiques du temps. Comme x ne contient que des cosinus, et y seulement des sinus; comme d'autre part les développements de x et de y ne contiennent que des

termes dépendant des multiples *impairs* de τ, les deux axes des x et des y seront des axes de symétrie pour cette courbe fermée T.

En éliminant $\varkappa$ entre les équations (4) et en regardant C comme une constante arbitraire, nous formons un système (5) ou (6), ou (7) et (8) qui peut être regardé comme plus général, puisque ce système ne change pas quand on change x, y et C en λx, λy, $\lambda^2 C$, en désignant par λ une constante quelconque. Si une courbe fermée T satisfait aux équations (3), elle satisfera également aux équations (7) et (8); mais ces équations (7) et (8) admettront en outre pour solution toute courbe homothétique à T par rapport à l'origine.

Le problème a été entièrement résolu par Hill, ainsi que je l'ai rappelé dans mes *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. I, p. 97). Pour les petites valeurs de m, Hill trouve une courbe ayant la forme générale d'une ellipse, pour $m = 1,78$, il trouve une courbe avec deux points de rebroussement situés sur l'axe des x.

S'il avait poussé plus loin, il aurait sans doute trouvé une courbe avec deux points doubles symétriquement situés sur l'axe des x; puis ces deux points doubles se seraient confondus en un seul situé à l'origine, puis ils auraient disparu et la courbe T serait redevenue une courbe fermée sans point double mais parcourue dans le sens rétrograde. Mais les premières courbes déterminées par Hill ont seules de l'intérêt pour l'étude du mouvement de notre satellite.

327. Calcul des coefficients. — Voici à quoi revient la méthode de M. Hill, pour les petites valeurs de m. Au lieu des équations (3) envisageons les équations plus générales

$$(3\,bis)\qquad \begin{cases} x'' - 2py' - \dfrac{3}{2}p^2 x - \dfrac{3}{2}m^2 x + \dfrac{\varkappa x}{r^3} = 0, \\ y'' + 2px' - \dfrac{3}{2}p^2 y + \dfrac{3}{2}m^2 y + \dfrac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{cases}$$

En les traitant comme plus haut on en déduirait, au lieu de (7) et (8), les équations

$$(7\,bis)\qquad us'' - 2pius' + \frac{u's'}{2} - \frac{9}{4}p^2 us = \frac{m^2}{8}(15u^2 + 3s^2) + C,$$

$$(8\,bis)\qquad su'' + 2pisu' + \frac{u's'}{2} - \frac{9}{4}p^2 us = \frac{m^2}{8}(3u^2 + 15s^2) + C.$$

Nous allons développer la solution suivant les puissances croissantes de m^2 ; une fois la solution obtenue, nous y ferons $p = m$ pour retomber sur les équations (3).

Supposons le problème résolu et posons

$$(9) \quad \begin{cases} \zeta = e^{i\tau}, \qquad \dfrac{u}{\zeta} = u_0 + m^2 u_1 + \ldots + m^{2q} u_q + \ldots, \\ \dfrac{s}{\zeta^{-1}} = s_0 + m^2 s_1 + m^4 s_2 + \ldots + m^{2q} s_q + \ldots, \\ C = C_0 + m^2 C_1 + m^4 C_2 + \ldots + m^{2q} C_q + \ldots. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer par approximations successives, d'abord u_0, s_0, C_0, puis u_1, s_1, C_1, puis u_2, s_2, C_2; ..., et ainsi de suite.

On prendra d'abord

$$u_0 = s_0 = 1, \qquad C_0 = -\frac{1}{2} - 2p - \frac{9}{4}p^2.$$

Quand on aura remplacé dans (7 *bis*) et (8 *bis*) u, s et C par leurs développements (9), on trouvera dans le premier membre des termes de la forme

$$m^{2\alpha+2\beta} u_\alpha s_\beta,$$

et d'autres d'une forme analogue où u_α ou s_β, ou tous deux, ont été remplacés par l'une de leurs deux premières dérivées. Dans le second membre on trouvera des termes de la forme

$$m^{2\alpha+2\beta+2} \zeta^2 u_\alpha u_\beta,$$

ou de la forme

$$m^{2\alpha+2\beta+2} \zeta^{-2} s_\alpha s_\beta,$$

ou encore de la forme

$$m^{2\alpha} C_\alpha.$$

Je suppose qu'on ait déterminé dans les approximations précédentes

$$\begin{array}{llll} u_0, & u_1, & \ldots, & \text{jusqu'à } u_{q-1}, \\ s_0, & s_1, & \ldots, & \quad \text{»} \quad s_{q-1}, \\ C_0, & C_1, & \ldots, & \quad \text{»} \quad C_{q-1}, \end{array}$$

et qu'on veuille déterminer u_q, s_q, C_q. Égalons les coefficients de m^{2q}.

Dans le premier membre nous devrons retenir les termes qui

contiennent m^{2q} en facteurs, c'est-à-dire ceux où

$$\alpha + \beta = q.$$

Ces termes ne contiendront que des quantités connues sauf ceux où $\alpha = q$, $\beta = 0$, ou bien encore ceux où $\alpha = 0$, $\beta = q$. Dans le second membre nous devrons retenir ceux où

$$\alpha + \beta = q - 1,$$

ils ne contiendront que des quantités connues; nous devons encore retenir le terme $m^{2q} C_q$ qui est inconnu.

Les termes encore inconnus du premier membre de (7 *bis*) s'obtiendront donc de la façon suivante; prenons par exemple le terme

$$us'',$$

je puis l'écrire

$$us'' = u[s\zeta\zeta^{-1}]'' = u\zeta^{-1}[(s\zeta)'' - 2i(s\zeta)' + (s\zeta)].$$

Or, on a, par les développements (9),

$$(s\zeta) = \sum m^{2\beta} s_\beta, \qquad (s\zeta)' = \sum m^{2\beta} s'_\beta, \qquad (s\zeta)'' = \sum m^2\ s''_\beta,$$

$$u\zeta^{-1} = \sum m^{2\alpha} u_\alpha.$$

Nous devons, d'après ce qui précède, retenir les termes tels que $\alpha + \beta = q$; nous distinguons parmi eux ceux qui contiennent une des inconnues s_q ou u_q; c'est-à-dire les termes tels que $\alpha = 0$, $\beta = q$, ou bien $\alpha = q$, $\beta = 0$. Les termes à conserver sont donc les suivants (en rappelant que $u_0 = 1$, $s_0 = 1$, $s'_0 = 0$, $s''_0 = 0$):

$$s''_q - 2is'_q - s_q - u_q.$$

Nous opérerions de la même façon sur les autres termes du premier membre et il nous resterait comme termes, contenant l'une des inconnues,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & s''_q + \left(2p + \frac{3}{2}\right) is'_q - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right) s_q \\ & \quad - i\frac{u'_q}{2} - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right) u_q. \end{aligned} \right.$$

Conservons ces termes (10) dans le premier membre, et faisons

passer au contraire dans le deuxième membre tous les termes qui ne contiennent que des quantités connues; nous obtiendrons une équation de la forme

$$\Delta(s_q, u_q) = \Phi_q + C_{2q}. \tag{11}$$

Dans cette équation, $\Delta(s_q, u_q)$ n'est autre chose que l'expression (10); c'est donc une combinaison linéaire à coefficients constants de s_q, u_q et de leurs dérivées. La fonction Φ_q est l'ensemble des termes *connus* qui se trouvaient dans le deuxième membre ou qu'on y a fait passer. C'est une fonction périodique de τ.

En opérant de la même façon sur (8 *bis*) on aurait obtenu

$$\Delta'(s_q, u_q) = \Phi'_q + C_q; \tag{12}$$

$\Delta'(s_q, u_q)$ est l'expression

$$u''_q - \left(2p + \frac{3}{2}\right) i u'_q - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right) u_q$$
$$+ \frac{i s'_q}{2} - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right) s_q,$$

imaginaire conjuguée de $\Delta(s_q, u_q)$ et déduite par conséquent de $\Delta(s_q, u_q)$ en permutant s_q et u_q et changeant i en $-i$.

Φ'_q est l'imaginaire conjugée de Φ_q; c'est donc une fonction connue et périodique de τ, développable suivant les puissances positives et négatives de ζ^2. Pour passer de Φ_q à Φ'_q, il suffit de changer ζ en ζ^{-1} et de remplacer les coefficients numériques par leurs imaginaires conjuguées; nous verrons plus loin que ces coefficients numériques sont toujours réels et par suite que cette dernière opération est inutile.

Quoi qu'il en soit, nos fonctions inconnues se trouvent déterminées par les équations (11) et (12) qui forment un système d'équations linéaires à coefficients constants et à second membre.

Soient, par exemple, a, a', ξ et η les coefficients de ζ^k dans Φ_q, Φ'_q, u_q et s_q; il s'agit de déterminer les coefficients inconnus ξ et η à l'aide des coefficients connus a et b.

Pour cela, les équations (11) et (12) nous donnent

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta\left[-k^2 - \left(2p + \frac{3}{2}\right)k - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right)\right] + \xi\left[\ \frac{k}{2} - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right)\right] = a,\\ &\xi\left[-k^2 + \left(2p + \frac{3}{2}\right)k - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right)\right] + \eta\left[-\frac{k}{2} - \left(\frac{9p^2}{4} + 2p + \frac{1}{2}\right)\right] = a'.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations du premier degré nous donneront ξ et η.

Le cas de $k = 0$ mérite une mention spéciale; d'abord les premiers membres des deux équations (13) deviennent identiques; ensuite il faut tenir compte dans les seconds membres du terme C_q; les équations s'écrivent alors

$$(14) \quad \begin{cases} -(\xi+\eta)\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right) = a + C_q, \\ -(\xi+\eta)\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right) = a' + C_q. \end{cases}$$

Elles ne peuvent être satisfaites que si $a = a'$; or a et a' sont imaginaires conjuguées par définition; les équations ne peuvent donc être satisfaites que si a est réel; nous verrons plus loin qu'il en est toujours ainsi.

Les équations (14) nous donneront donc pour $\xi + \eta$ une valeur réelle A; on prendra $\xi = \eta = \frac{A}{2}$, de telle façon que ξ et η soient imaginaires conjuguées, et en même temps réelles.

La présence de C_q introduit une indétermination dans le problème. On peut supposer que la constante C est une donnée de la question; alors C ne dépend pas de m et l'on doit faire dans (14) $C_q = 0$.

On peut également s'imposer la condition que le coefficient de ζ dans u et celui de ζ^{-1} dans s soient égaux à 1. Ce coefficient ne dépendant pas de m, on doit avoir $\xi = \eta = 0$, de sorte que la première équation (14) se réduit à

$$0 = a + C_q,$$

ce qui détermine C_q.

328. Je dis d'abord que les coefficients de tous les termes du développement de u et de s seront réels. En effet, supposons que cela soit vrai pour

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{q-1},$$
$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_{q-1};$$

je dis que cela sera vrai pour u_q et s_q.

En effet, si cela est vrai pour

$$(15) \qquad u_\alpha, \quad s_\alpha \qquad (\alpha < q),$$

cela sera vrai également pour

$$(16) \qquad iu'_\alpha, \quad is'_\alpha, \quad u''_\alpha, \quad s''_\alpha \qquad (\alpha < q),$$

et par conséquent pour les termes *connus* de (7 *bis*) qui sont tous le produit de deux expressions de la forme (15) ou (16) affectés d'un coefficient réel.

Donc, dans le développement de Φ_q suivant les puissances de ζ^2, tous les coefficients sont réels. Donc, dans les équations (13) et (14), les quantités a et a' sont réelles; or les coefficients de ces équations du premier degré (13) et (14) sont également réels; donc nous en déduirons pour ξ et η, c'est-à-dire pour les coefficients de u_q et s_q, des valeurs réelles. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que nous aurons seulement dans u_0 et s_0 des termes en ζ^0; dans u_1 et s_1 des termes en

$$\zeta^2, \quad \zeta^{-2};$$

dans u_2 et s_2 des termes en

$$\zeta^4, \quad \zeta^0, \quad \zeta^{-4};$$

dans u_3 et s_3 des termes en

$$\zeta^6, \quad \zeta^2, \quad \zeta^{-2}, \quad \zeta^{-6};$$

et ainsi de suite. En d'autres termes, je dis que $u\zeta^{-1}$ et $s\zeta$ sont développables suivant les puissances de $m^2\zeta^2$ et $m^2\zeta^{-2}$.

Je dis en effet que, si cela est vrai pour les premières approximations, cela sera vrai aussi pour l'approximation suivante. Je suppose donc que

$$u_\alpha, \quad s_\alpha \qquad (\alpha < q)$$

sont des polynomes homogènes de degré α en ζ^2 et ζ^{-2}, et je me propose de démontrer que u_q, s_q seront aussi des polynomes homogènes de degré q en ζ^2, ζ^{-2}. D'abord les dérivées u'_α, etc., seront comme u_α, etc., homogènes de degré α. Considérons maintenant les différents termes de Φ_q; nous avons d'abord :

1° Ceux des termes du premier membre de (7 *bis*) qu'on a fait passer dans le deuxième membre parce qu'ils ne contenaient pas de quantité inconnue. Ils sont égaux à un facteur numérique près à

$$u_\alpha s_\beta \qquad (\alpha < q, \ \beta < q, \ \alpha + \beta = q),$$

u_α ou s_β pouvant être remplacés par une de leurs dérivées ; ce sont donc des polynomes homogènes de degré q en ζ^2 et ζ^{-2} ;

2° Les termes provenant de $\frac{15 m^2 u^2}{8}$; ils sont de la forme

$$\zeta^2 u_\alpha u_\beta \qquad (\alpha + \beta = q - 1),$$

et par conséquent homogènes de degré q en ζ^2, ζ^{-2} ;

3° Les termes provenant de $\frac{3 m^2 s^2}{8}$; ils sont de la forme

$$\zeta^{-2} s_\alpha s_\beta \qquad (\alpha + \beta = q - 1) ;$$

ils sont donc aussi homogènes de degré q.

Donc Φ_q est un polynome homogène de degré q en ζ^2, ζ^{-2}. Mais u_q et s_q se déduisent de Φ_q par les équations (13) ; les termes de u_q et s_q correspondent à ceux de Φ_q et contiennent les mêmes puissances de ζ ; donc u_q et s_q sont les polynomes homogènes de degré q en ζ^2, ζ^{-2}. C. Q. F. D.

Il résulte de là que, si l'on développe le coefficient de ζ^{2k} ou ζ^{-2k} suivant les puissances de m, le développement contiendra seulement des termes où l'exposant de m prendra les valeurs

$$2k, \quad 2k+4, \quad 2k+8, \quad \ldots.$$

Ce développement procédera donc non pas suivant les puissances de m, mais suivant celles de m^4. *C'est ce qui explique la convergence extrêmement rapide du procédé de M. Hill,* chaque approximation donnant 4 ou 5 décimales exactes nouvelles.

329. Je dis maintenant que les coefficients ξ et η calculés d'après les procédés précédents sont des fonctions rationnelles de p. Supposons en effet que cela soit vrai aux approximations antérieures ; je dis que cela est encore vrai à l'approximation suivante. En effet, cela sera vrai des coefficients de Φ_q formés par multiplication en partant de ceux de u_α, s_α $(\alpha < q)$; cela sera donc vrai des coefficients a et a' qui figurent dans les équations (13) ; les coefficients de ces équations (13) étant rationnels en p, il en sera de même des inconnues ξ et η, c'est-à-dire des coefficients de u_q et s_q. C. Q. F. D.

Quels seront les facteurs des dénominateurs de ces fonctions rationnelles? Il est aisé de les déterminer. En effet, la résolution des équations (13) introduit au dénominateur un facteur qui est le déterminant de ces équations, lequel est égal à

$$\frac{k^2}{2}(p^2 - 4p - 2 + 2k^2).$$

Les facteurs du dénominateur seront donc les polynomes

$$p^2 - 4p - 2 + 2k^2,$$

où l'on devra donner à k les valeurs paires successives

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots$$

ce qui donne les polynomes

$$(17) \qquad \begin{cases} p^2 - 4p + 6, \\ p^2 - 4p + 30, \\ p^2 - 4p + 70, \quad \ldots \end{cases}$$

Si donc on développe le coefficient de ζ^{2k+1} suivant les puissances de m, le coefficient de chaque puissance est une fonction rationnelle de p dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme (17), chacun de ces facteurs pouvant être élevé à une puissance supérieure à 1. Il ne faudrait pas en conclure pourtant que le coefficient de ζ^{2k+1}, considéré comme fonction de p et de m, est une fonction méromorphe de ces quantités, ou encore qu'il se réduit à une fonction méromorphe de m quand on fait $p = m$.

329 *bis*. Quoi qu'il en soit, l'approximation par ces méthodes est extrêmement rapide. M. Hill a calculé les coefficients ou plutôt leurs rapports avec 15 décimales; la première approximation lui donnait généralement 6 décimales exactes, la seconde 11 et la troisième 15. D'autre part, la décroissance des coefficients est aussi très rapide; dans le développement de u, par exemple, les coefficients de $\zeta, \zeta^3, \zeta^5, \ldots$ diminuent très vite, chacun d'eux étant environ la trois-centième partie du précédent. Le coefficient de ζ qui est naturellement le plus grand nous donne le terme principal de l'orbite non troublée; viennent ensuite ceux de ζ^3 et de ζ^{-1} qui

correspondent à l'inégalité considérable connue depuis la fin du moyen âge sous le nom de *variation*.

Les valeurs numériques sont donc très exactement connues; mais nous ne possédons encore que les *rapports* de nos coefficients; les équations (7 *bis*) et (8 *bis*) contiennent en effet une indéterminée C, et nous avons profité de cette indétermination pour supposer que le coefficient de ζ dans u, de même que celui de ζ^{-1} dans s, est égal à 1. Cela revenait à satisfaire aux équations (14) en faisant

$$\xi = \eta = 0, \qquad a + C_q = 0.$$

C'est ainsi que nous avons opéré à la fin du n° 327. Nous avons ainsi trouvé une solution particulière des équations (7 *bis*) et (8 *bis*),

$$u = \psi(\zeta), \qquad s = \psi_1(\zeta),$$

caractérisée par ce fait que, ψ et ψ_1 étant imaginaires conjuguées, le coefficient de ζ dans $\psi(\zeta)$ est égal à 1. Alors nous aurons une autre solution en faisant

$$u = a_0 \psi(\zeta), \qquad s = a_0 \psi_1(\zeta),$$

à la condition de changer l'indéterminée C en a_0^2C. Il reste à déterminer a_0.

Pour cela, il faut (après avoir fait $p = m$) revenir aux équations primitives, qui peuvent s'écrire

$$u'' + 2\, m\, i\, u' - \frac{3}{2}\, m^2 (u + s) + \frac{\varkappa u}{r^3} = 0,$$

et voir quelle valeur de a_0 correspond à la valeur donnée de $\varkappa$.

Pour cela soit

$$\psi(\zeta) = \sum a_k \zeta^{2k+1};$$

il viendra pour $\tau = 0$, $\zeta = 1$:

$$r = u = s = a_0 \sum a_k = a_0 \psi(1),$$

$$u' = i a_0 \sum (2k+1)\, a_k, \qquad u'' = -a_0 \sum (2k+1)^2 a_k.$$

Les coefficients a_k étant connus, on connaît donc facile-

ment $\psi(1)$, $\psi'(1)$, $\psi''(1)$, et il vient

$$a_0^3 \psi^2(1)[\psi''(1) + 2mi\psi'(1) - 3m^2\psi(1)] = \varkappa, \tag{18}$$

d'où l'on tirera sans peine a_0.

330. On voit facilement que la résolution de l'équation (18) entraîne l'extraction d'une racine cubique. Nous devons donc nous attendre à trouver que, dans le voisinage de certaines valeurs singulières m_0, l'expression de a_0 et par conséquent celle des autres coefficients de u qui sont $a_0 a_1$, $a_0 a_2$, ..., contiennent en facteur $(m - m_0)^{-\frac{1}{3}}$ ou $(m - m_0)^{\frac{2}{3}}$, par exemple.

C'est en effet ce qui arrive pour $m_0 = 1$.

Supposons donc qu'on veuille développer a_0 suivant les puissances de m; alors la convergence sera comparable à celle d'une progression géométrique de raison

$$\frac{m}{m_0},$$

m_0 étant le point singulier le plus rapproché; si ce point est 1, puisque $m = \frac{1}{12}$, cette raison sera

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{12}.$$

Si l'on avait développé suivant les puissances de

$$m' = \frac{n_2}{n_1} = \frac{m}{1+m},$$

comme l'a fait Delaunay, la raison aurait été

$$\frac{m'}{m'_0} = \frac{2}{13},$$

donc notablement plus grande.

On arrive au même résultat en ce qui concerne le développement de a_1; le point singulier le plus rapproché provient avant tout de la présence du facteur $p^2 - 4p + 6$ dans nos dénominateurs (*cf.* n° 328 *in fine*); dans ce facteur on fait $p = m$, de sorte que l'on a à peu près

$$m_0^2 - 4m_0 + 6 = 0,$$

d'où

$$|m_0| = \sqrt{6}$$

et, pour la raison de la progression,

$$\left|\frac{m}{m_0}\right| = \frac{1}{12\sqrt{6}};$$

avec m', on aurait eu

$$|m'_0| = \frac{|m_0|}{|1+m_0|} = \sqrt{\frac{6}{1+4+6}} = \sqrt{\frac{6}{11}}$$

et, pour la raison,

$$\left|\frac{m'}{m'_0}\right| = \frac{\sqrt{11}}{12\sqrt{6}}.$$

On voit combien il est plus avantageux de choisir m comme paramètre au lieu de m'. Naturellement la même différence se retrouve dans le calcul des termes suivants, puisque les nouveaux développements que l'on obtient pour ces termes se déduisent de ceux que nous venons d'obtenir pour les termes d'ordre zéro.

330 *bis*. Une solution particulière remarquable s'obtient en faisant $\varkappa = 0$; on trouve alors

$$u = \alpha\zeta^k + \beta\zeta^{-k}, \qquad s = \beta\zeta^k + \alpha\zeta^{-k},$$

α, β et k étant liés par les relations

$$\alpha\left(-k^2 - 2pk - \frac{3}{2}p^2\right) - \frac{3}{2}\beta m^2 = 0,$$

$$\beta\left(-k^2 + 2pk - \frac{3}{2}p^2\right) - \frac{3}{2}\alpha m^2 = 0,$$

d'où

$$\left(k^2 + \frac{3}{2}p^2\right)^2 - 4p^2k^2 - \frac{9}{4}m^4 = 0,$$

ou, en faisant $p = m$,

$$k^4 - m^2k^2 = 0.$$

Pour que cette solution nous convienne, il faut que k soit entier impair, et par conséquent que l'on ait

$$m = 1, \qquad m = 3, \qquad m = 5, \qquad \ldots.$$

La courbe décrite par le point x, y se réduit alors à une ellipse.

Mais cela correspond à $\varkappa = 0$, c'est-à-dire, en se reportant à l'équation (18), à

$$\psi^2(1)\,[\psi''(1) + 2mi\psi'(1) - 3m^2\psi(1)] = 0.$$

Si alors on donne à $\varkappa$ une valeur donnée finie, il faut faire $a_0 = \infty$.

Donc, quand m se rapproche de la valeur 1, la trajectoire T du point x, y tend à être de plus en plus semblable à une ellipse, mais les dimensions absolues augmentent au delà de toute limite; c'est de cette façon que s'introduisent dans a_0 des facteurs tels que

$$(m-1)^{-\frac{1}{3}},$$

ainsi que nous l'avons expliqué plus haut.

L'ellipse à laquelle on parvient en faisant $m = 3$, $m = 5$, etc., ne fait pas partie de la série de solutions que nous envisageons ici, puisque la période n'est plus 2π, mais $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, ...

CHAPITRE XXVI.

MOUVEMENT DU NOEUD.

331. Nous allons maintenant déterminer les termes du premier degré par rapport à l'inclinaison E_2 ; nous négligerons donc comme dans le Chapitre précédent la parallaxe et l'excentricité solaire E_3 ; seulement nous ne supposerons plus $z = 0$.

Dans ces conditions, nous avons encore

$$\frac{U_3}{m_1'} = -\frac{m_4}{a'^3} P_2 AC^2,$$

$$P_2 = \frac{3\cos^2\gamma - 1}{2}, \qquad AC.\cos\gamma = x;$$

mais on a

$$AC^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$\frac{U_3}{m_1'} = -n_2^2 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{U_1}{m_1'} = -\frac{m_1 + m_7}{r},$$

d'où

$$F' = n_2 v' + \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r}$$
$$+ n_2(Xy - Yx) - n_2^2 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2}.$$

Cela posé, nous retrouvons les équations (1) du Chapitre précédent, avec cette différence que $AC = r$ ne représente plus $\sqrt{x^2 + y^2}$, mais $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nous trouvons ensuite

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dF'}{dZ} = Z,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dZ}{dt} = -\frac{dF'}{dz} = -n_2^2 z - \frac{m_1 + m_7}{r^3} z.$$

Si nous posons, comme au Chapitre précédent,

$$\tau = (n_1 - n_2)t, \qquad m = \frac{n_2}{n_1 - n_2}, \qquad \varkappa = \frac{m_1 + m_7}{(n_1 - n_2)^2},$$

$$z'' = \frac{d^2 z}{d\tau^2},$$

l'équation précédente devient

$$z'' + \Theta z = 0, \tag{1}$$

avec

$$\Theta = m^2 + \frac{\varkappa}{r^3}.$$

Si nous cherchons les termes de l'ordre de l'inclinaison, nous négligeons le carré de l'inclinaison et par conséquent z^2; nous pouvons alors prendre

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

de sorte que nous retombons sur les équations (1) du Chapitre précédent, sans changement. Et comme nous devons faire $E_1 = 0$, puisque les termes que nous voulons calculer sont indépendants de l'excentricité lunaire E_1, nous devons prendre pour x et y la solution particulière étudiée dans le Chapitre précédent. Donc x et y sont des fonctions *connues* du temps, développables suivant les puissances impaires positives et négatives de $\zeta = e^{i\tau}$.

$\frac{\varkappa}{r}$ nous est ensuite donné par l'intégrale de Jacobi

$$\frac{\varkappa}{r} = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{3 m^2 x^2}{2} - C,$$

d'où l'on déduit aisément $\frac{\varkappa}{r^3}$ et Θ.

Donc Θ est une fonction connue du temps développable suivant les puissances *paires*, positives et négatives de ζ.

Nous avons vu que, quand on introduisait les deux paramètres p et m qui figurent aux équations (3 *bis*), (7 *bis*) et (8 *bis*) du Chapitre précédent,

$$u\zeta^{-1} = \zeta^{-1}(x + iy),$$
$$s\zeta \;\; = \zeta \;\; (x - iy)$$

sont développables suivant les puissances de p, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$; il

en est donc de même de Θ, de sorte qu'après qu'on aura fait $p=m$, Θ sera développable suivant les puissances de

$$m, \quad m^2\zeta^2, \quad m^2\zeta^{-2}.$$

De plus, quand on change τ en $-\tau$, ou ζ en ζ^{-1}, u se change en s, de sorte que r et Θ ne changent pas.

Si donc nous posons

$$\Theta = \sum \Theta_k \zeta^{2k},$$

on aura

$$\Theta_k = \Theta_{-k},$$

et l'on pourra écrire

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \ldots.$$

Θ étant développable suivant les puissances de m, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$, le coefficient Θ_k contient en facteur m^{2k}, de sorte que les coefficients Θ décroissent très rapidement.

332. Il s'agit donc d'intégrer l'équation (1).

Cette équation est de même forme que celle que nous avons examinée au Chapitre XVII des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Nous savons donc :

1° Que cette équation admet deux solutions particulières de la forme

$$(2) \qquad z = e^{ig\tau}\psi(\tau), \qquad z = e^{-ig\tau}\psi(-\tau),$$

$\psi(\tau)$ étant une fonction périodique de la forme

$$\psi(\tau) = \sum b_k \zeta^{2k},$$

où k prend toutes les valeurs entières positives et négatives.

Nous devons remarquer en effet que l'équation (1) ne change pas quand on change τ en $-\tau$; l'existence de la première des solutions (2) entraîne donc celle de la seconde.

2° Nous aurons ensuite les deux solutions

$$z = \mathrm{F}(\tau) = \quad e^{ig\tau}\psi(\tau) + e^{-ig\tau}\psi(-\tau),$$
$$z = f(\tau) = \lambda[e^{ig\tau}\psi(\tau) - e^{-ig\tau}\psi(-\tau)],$$

dont la première est une fonction paire et la deuxième une fonction impaire de τ.

Nous pouvons achever de déterminer $\psi(\tau)$ (qui n'est encore déterminé qu'à un facteur constant près) et la constante λ, de telle sorte que

$$F(0) = 1, \qquad F'(0) = 0,$$
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\psi(0) = \frac{1}{2}.$$

3° En vertu d'un théorème démontré dans mon Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 212) et rappelé dans *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. II, Chap. XVII, p. 230), la fonction $F(\tau)$ considérée comme fonction des Θ_k est une fonction entière.

Nous trouverons alors

$$F(\tau) = \sum b_k \cos(g + 2k)\tau,$$

k variant de $-\infty$ à $+\infty$.

La fonction $\psi(\tau)$ est périodique de période π, de sorte que l'on a

$$(3) \qquad \psi(\pi) = \psi(0) = \frac{1}{2}, \qquad F(\pi) = \cos g\pi.$$

333. L'équation $F(\pi) = \cos g\pi$ a une grande importance; c'est elle en effet qui va nous permettre de déterminer g, c'est-à-dire le mouvement du nœud.

En effet, la solution générale de l'équation (1) peut s'écrire

$$z = E_2 F(\tau + \varpi_4),$$

E_2 et ϖ_4 étant deux constantes d'intégration, la première représentant la constante d'inclinaison, et la deuxième la constante ϖ_4 qui figure dans la formule du Chapitre XXIV,

$$w_4 = w'_2 = n_4 t + \varpi_4.$$

Si nous faisons en effet $g = \frac{n_4}{n_1 - n_2}$, on voit que la formule pré-

cédente peut s'écrire

$$z = \sum E_2 b_k \cos(w_4 + w_1 + 2kw_1 - 2kw_2),$$

où nous reconnaissons la forme des formules du Chapitre XXIV. (Il suffirait de changer la constante arbitraire ϖ_4 en $\varpi_4 + \frac{\pi}{2}$, pour avoir un sinus au lieu d'un cosinus.)

Cela posé, les passages au nœud s'obtiendront en faisant $z = 0$; le terme principal du développement étant

$$E_2 b_0 \cos w_4,$$

les passages au nœud ascendant auront lieu sensiblement pour

$$w_1 + w_4 = g\tau + \varpi_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Dans l'intervalle de deux passages au nœud consécutifs, la différence des longitudes moyennes de la Lune et du Soleil aura augmenté sensiblement de $\frac{2\pi}{g}$; si l'on considère $n + 1$ passages consésécutifs au nœud ascendant, cette différence aura augmenté sensiblement de $\frac{2\pi n}{g}$, et cela d'autant plus exactement que n sera plus grand. Donc g mesure le *moyen* mouvement du nœud.

334. Pour calculer $F(\tau)$, voici comment nous allons procéder. Posons

$$\Theta_0 = q^2,$$

et écrivons l'équation (1) sous la forme

$$z'' + q^2 z = (\Theta_0 - \Theta) z, \tag{4}$$

puis cherchons à développer $F(\tau)$ suivant les puissances de Θ_1, Θ_2, etc.; le développement sera très convergent, puisque nous avons vu que ces coefficients sont très petits, et d'autre part que $F(\tau)$ est une fonction entière de ces coefficients.

Représentons alors par $z_0, z_1, \ldots, z_k$ les termes de $F(\tau)$ qui sont de degré $0, 1, \ldots, k$ par rapport aux coefficients $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$; nous aurons, pour déterminer successivement

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_k, \quad \ldots,$$

le système d'équations

$$(5) \qquad \begin{cases} z''_0 + q^2 z_0 = 0, \\ z''_1 + q^2 z_1 = (\Theta_0 - \Theta) z_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z''_k + q^2 z_k = (\Theta_0 - \Theta) z_{k-1}. \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants et à second membre, immédiatement intégrables; il faut, pour achever de définir $z_0, z_1, \ldots, z_k$, se donner les conditions initiales qui seront

$$z_0 = 1, \qquad z'_0 = 0, \qquad z_1 = z'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad z_k = z'_k = 0.$$

Nous trouvons d'abord

$$z_0 = \cos q\tau,$$

et pour z_k une expression où figurent des termes en

$$(6) \qquad \cos(2j+q)\tau, \quad \tau^{2\mu+1}\sin(2j+q)\tau, \quad \tau^{2\mu}\cos(2j+q)\tau,$$

j et μ étant entiers et $2\mu+1$ étant au plus égal à k.

En effet, il est aisé de vérifier que, si cela est vrai pour z_{k-1}, cela sera vrai également pour z_k.

Ainsi le terme général du développement de $F(\tau)$ sera de la forme (6); il est aisé d'en apercevoir la raison : nous avons trouvé

$$F(\tau) = \sum b_j \cos(g+2j)\tau.$$

D'autre part, g est développable suivant les puissances de Θ_1, $\Theta_2, \ldots$ et se réduit à q pour $\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = 0$.

Je puis donc écrire

$$F(\tau) = \sum b_j \cos[(q+2j)\tau + (g-q)\tau]$$

et développer suivant les puissances de $g-q$; soit alors

$$\cos\tau = \sum \alpha_\mu \tau^{2\mu}, \qquad \sin\tau = \sum \beta_\mu \tau^{2\mu+1},$$

les coefficients α_μ et β_μ ayant les valeurs numériques bien connues;

il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} F(\tau) = \sum b_j \alpha_\mu (g-q)^{2\mu}\tau^{2\mu}\cos(q+2j)\tau \\ \qquad -\sum b_j \beta_\mu (g-q)^{2\mu+1}\tau^{2\mu+1}\sin(q+2j)\tau. \end{cases}$$

On peut ensuite développer les b_j et les puissances de $g-q$ suivant les puissances de Θ_1, Θ_2 ..., et l'on devra retrouver le même développement que par le moyen des équations (5). On voit que le terme général est bien de la forme (6).

335. Voyons comment on peut se servir de ces développements pour déterminer g et les coefficients b_j.

Supposons que l'on ait déterminé

$$z_0,\quad z_1,\quad \ldots,\quad z_k;$$

on a donc, à des quantités près de l'ordre de m^{2k+2},

$$F(\tau) = z_0 + z_1 + \ldots + z_k,$$

et $F(\tau)$ se présente sous la forme d'un développement (7) dont tous les termes sont de la forme (6).

Dans ce développement, conservons seulement les termes périodiques purs en $\cos(q+2j)\tau$, ceux où τ ne sort pas des termes trigonométriques; les coefficients de ces termes seront précisément les coefficients b_j cherchés, au même degré d'approximation, c'est-à-dire à des quantités près de l'ordre de m^{2k+2}; et en effet α_0 est égal à 1.

Pour déterminer g nous calculerons $F(\pi)$ en faisant $\tau = \pi$ dans le développement (7) et nous aurons ensuite g par l'équation

$$F(\pi) = \cos g\pi.$$

En faisant cette substitution on trouve

$$F(\pi) = H\cos q\pi + H'\sin q\pi,$$

H et H' étant des fonctions entières de Θ_1, Θ_2, ...

D'autre part, les coefficients de ces fonctions entières seront des fonctions rationnelles de q; car, si les coefficients de z_{k-1} dépendent rationnellement de q, il en sera de même, en vertu des équations (5), des coefficients de z_k.

Les premiers termes sont

$$\cos g\pi = \cos q\pi \left[1 - \frac{\pi^2 \Theta_1^4}{2^5 q^2 (1-q^2)^2} \right] + \sin q\pi \left[\frac{-\pi\Theta_1^2}{4q(1-q^2)} + \frac{(15q^4 - 35q^2 + 8)\pi\Theta_1^4}{64q^3(1-q^2)^3(4-q^2)} \right].$$

Quand on change τ en $\tau + \frac{\pi}{2}$, $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5, \ldots$ changent de signe; la valeur de $\cos g\pi$ ne doit pas changer. Donc, dans le développement de $F(\pi)$, $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5, \ldots$ entreront avec un exposant pair. Supposons un instant

$$0 = \Theta_1 = \Theta_3 = \Theta_5 = \ldots;$$

alors Θ admettra la période $\frac{\pi}{2}$; alors, quand on changera τ en $\tau + \frac{\pi}{2}$,

$$\Theta_2, \quad \Theta_6, \quad \Theta_{10}, \quad \ldots$$

changeront de signe; donc $\Theta_2, \Theta_6, \Theta_{10}, \ldots$ ne pourront figurer qu'à un degré pair, à moins d'être multipliés par

$$\Theta_1^2, \quad \Theta_3^2, \quad \ldots, \quad \Theta_1\Theta_3, \quad \Theta_1\Theta_5, \quad \ldots.$$

De même

$$\Theta_4, \quad \Theta_{12}, \quad \Theta_{20}, \quad \ldots$$

ne pourront figurer qu'à un degré pair, à moins d'être multipliés par

$$\Theta_1^2, \quad \Theta_3^2, \quad \ldots, \quad \Theta_1\Theta_3, \quad \ldots, \quad \Theta_2^2, \quad \Theta_6^2, \quad \ldots, \quad \Theta_2\Theta_6, \quad \ldots.$$

336. **Méthode de Hill.** — Hill ramène le problème à la résolution d'une infinité d'équations du premier degré à une infinité d'inconnues. On pourrait se demander si cette méthode est suffisamment rigoureuse; elle peut être complètement justifiée, mais je renverrai pour cette justification aux *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. II, Chap. XVII, p. 260 et suiv.).

Faisons dans l'équation (1)

$$z = e^{ig\tau}\psi(\tau) = \sum b_k \zeta^{2k+g};$$

il viendra

$$-\sum b_k(2k+g)^2 \zeta^{2k+g} + \sum \Theta_j b_k \zeta^{2k+2j+g} = 0$$

ou, en égalant les coefficients de ζ^{2j+g},

$$(8) \qquad [\Theta_0 - (2j+g)^2]\, b_j + \sum \Theta_{j-k} b_k = 0.$$

On obtient ainsi une infinité d'équations linéaires entre les inconnues b_j; pour les déterminer, considérons les expressions linéaires

$$b_j + \sum_k \frac{\Theta_{j-k}}{\Theta_0 - (2j+\xi)^2} b_k.$$

Ces expressions doivent s'annuler pour $\xi = g$. Formons leur déterminant et appelons-le $\square(\xi)$.

Je suppose pour cela que l'on donne à j et à k toutes les valeurs entières positives et négatives depuis $-\mu$ jusqu'à $+\mu$ inclusivement. Nous aurons alors un déterminant fini de $2\mu+1$ lignes et de $2\mu+1$ colonnes. Alors $\square(\xi)$ sera par définition la limite de ce déterminant quand μ croît indéfiniment.

Ce déterminant converge; nous pouvons remarquer en effet que les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1.

Dans ces conditions, on a

$$|\Delta| < e^{\Sigma|a|},$$

en désignant par a les divers éléments du déterminant autres que ceux de la diagonale principale. Le déterminant convergera donc avec $\sum|a|$; c'est ce que démontreraient les considérations exposées au Tome II des *Méthodes nouvelles* (*loc. cit.*). Or ici

$$\sum|a| = 2\sum|\Theta_j|\sum\frac{1}{|\Theta_0 - (2j+\xi)^2|}.$$

Or cette série converge absolument et uniformément, sauf si

$$\Theta_0 = (2j+\xi)^2$$

ou, puisque $\Theta_0 = q^2$, si

$$\xi = -2j \pm q.$$

Donc $\square(\xi) = \lim \Delta$ existe; c'est une fonction de ξ qui ne change pas quand on change ξ en $\xi+2$ ou en $-\xi$; cela revient en effet à changer l'ordre des lignes et des colonnes de notre déterminant d'ordre infini, soit en faisant avancer toutes les lignes et toutes les

colonnes d'un rang (si l'on change ξ en $\xi+2$), soit en retournant le déterminant (si l'on change ξ en $-\xi$); on aura donc

$$\square(\xi+2)=\square(\xi)=\square(-\xi);$$

$\square(\xi)$ est donc une fonction méromorphe de ξ, qui a pour pôles simples

$$\xi=-2j\pm q.$$

Je dis *pour pôles simples;* en effet, les éléments de la $j^{\text{ième}}$ ligne seuls deviennent infinis pour $\xi=-2j\pm q$ et infinis du premier ordre.

Or un terme quelconque de notre déterminant ne peut contenir en facteur qu'un seul élément de la $j^{\text{ième}}$ ligne.

Quand la partie imaginaire de ξ tend vers l'infini, tous les éléments en dehors de la diagonale principale tendent vers o; donc

$$\lim\square(\xi)=1.$$

Soit

$$F(\xi)=\square(\xi)\frac{\cos\pi\xi-\cos\pi q}{\cos\pi\xi-\cos\pi g}.$$

Cette fonction est méromorphe; elle ne pourrait devenir infinie que pour

$$\xi=-2j\pm q,$$

qui rend $\square(\xi)$ infini, mais qui annule également $\cos\pi\xi-\cos\pi q$, ou pour

$$\xi=-2j\pm g,$$

qui annule le dénominateur $\cos\pi\xi-\cos\pi g$, mais qui annule également $\square(\xi)$ puisque nous avons vu que

$$\square(g)=0$$

et par conséquent

$$\square(\pm g)=\square(-2j\pm g)=0.$$

La fonction $F(\xi)$ est donc entière, mais elle tend vers 1 quand la partie imaginaire de ξ tend vers l'infini; elle se réduit donc à l'unité, de sorte qu'on a

$$\square(\xi)=\frac{\cos\pi\xi-\cos\pi g}{\cos\pi\xi-\cos\pi q}.$$

On peut en déduire plusieurs manières de calculer g; par exemple, à l'aide de l'équation

$$\cos \pi g = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi q}{2} \square(0). \tag{9}$$

337. Il est aisé de voir quelle est la forme de notre déterminant. Supposons qu'un terme du développement contienne comme facteur l'élément de la $a^{\text{ième}}$ ligne et de la $b^{\text{ième}}$ colonne et, par conséquent, Θ_{a-b}; il devra contenir un élément de la $b^{\text{ième}}$ ligne, soit celui de la $c^{\text{ième}}$ colonne et, par conséquent, Θ_{b-c}; il devra contenir ensuite l'élément de la $c^{\text{ième}}$ ligne et de la $d^{\text{ième}}$ colonne, c'est-à-dire Θ_{c-d}, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur la $a^{\text{ième}}$ colonne, ce qui arrivera, par exemple, si l'on trouve un élément de la $d^{\text{ième}}$ ligne et de la $a^{\text{ième}}$ colonne dépendant de Θ_{d-a}.

Donc le terme envisagé contiendra en facteur le produit

$$\Theta_{a-b}\Theta_{b-c}\Theta_{c-d}\Theta_{d-a},$$

ou un produit analogue, ou plusieurs produits analogues.

Dans tous les cas *la somme algébrique des indices doit être nulle*.

Si l'on observe que

$$\Theta_j = \Theta_{-j},$$

et que par suite on ne fasse pas attention au signe des indices, nous dirons que les indices, tous regardés comme positifs, doivent pouvoir se diviser en deux classes de telle façon que la somme des indices de la première classe soit égale à la somme des indices de la deuxième classe. On pourra avoir par exemple des termes en

$$\Theta_1^2, \quad \Theta_1^4, \quad \Theta_1^2\Theta_2, \quad \Theta_1^3\Theta_3, \quad \Theta_1\Theta_2\Theta_3, \quad \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4, \quad \ldots.$$

Le coefficient de chaque terme se présente sous la forme d'une série infinie, mais toutes ces séries peuvent être sommées à l'aide de la formule

$$\sum \frac{1}{x+n} = \pi \cot x\pi. \tag{10}$$

Considérons, en effet, un terme du développement; ce sera le produit de certains éléments du déterminant; parmi ces éléments, les uns appartiendront à la diagonale principale et nous n'avons pas

à nous en occuper, puisqu'ils sont égaux à 1; les autres n'appartiendront pas à cette diagonale, et ils seront en nombre fini (sans quoi notre terme contenant en facteur m à une puissance infinie serait infiniment petit).

Appelons $[i, k]$ l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne, et supposons par exemple que le terme envisagé soit le produit des éléments

$$[a, b][b, c][c, d][d, a][a', b'][b', c'][c', a'].$$

Il contiendra alors en facteur, comme nous venons de le voir, le produit

$$\Theta_{a-b}\Theta_{b-c}\Theta_{c-d}\Theta_{d-a}\Theta_{a'-b'}\Theta_{b'-c'}\Theta_{c'-a'}, \tag{11}$$

et le coefficient de ce produit (11) sera une fonction rationnelle de ξ que j'appelle $R(\xi)$.

Considérons maintenant le terme

$$[a+n, b+n]\ldots[d+n, a+n][a'+n, b'+n]\ldots[d'+n, a'+n];$$

il contiendra également en facteur le produit (11), mais avec le coefficient $R(\xi+2n)$.

Le coefficient définitif sera donc

$$\sum R(\xi+2n).$$

Pour évaluer cette somme, décomposons la fonction rationnelle $R(\xi)$ en éléments simples :

$$R(\xi) = \sum \frac{A}{\xi-\alpha},$$

d'où

$$\sum R(\xi+2n) = \sum\sum \frac{A}{\xi+2n-\alpha}.$$

La sommation par rapport à n peut se faire par le moyen de l'équation (10). Si dans la décomposition de $R(\xi)$ figurait un terme

$$\frac{A}{(\xi-\alpha)^p},$$

on obtiendrait la sommation par rapport à n de

$$\sum \frac{A}{(\xi + 2n - \alpha)^p},$$

en différentiant l'équation (10).

En fait notre fonction $R(\xi)$ n'admettra pour pôles, comme nous l'avons vu plus haut, que $\xi = -2j \pm q$ et ces pôles seront simples; l'application de la formule (10) introduira donc seulement

$$\cot\left(\frac{\xi + 2j \pm q}{2}\right)\pi = \pm \cot\frac{\pi}{2}(\xi \pm q),$$

Cela s'applique au cas où nous n'aurions en facteurs qu'un seul produit de la forme

$$\Theta_{a-b}\Theta_{b-c}\Theta_{c-d}\Theta_{d-a}.$$

Dans le cas où l'on aurait en facteur deux (ou plusieurs) produits de cette forme, comme il arrive, par exemple, dans le cas du produit (11), les choses seraient un peu plus compliquées.

Supposons que nous ayons à envisager le produit des éléments

$$[n,\ n+a][n+a,\ n+b][n+b,\ n][n',\ n'+a'][n'+a',\ n'],$$

et que nous fassions varier n et n', en supposant que a, b, a' ne varient pas.

Nous aurons alors partout en facteur le produit

$$\Theta_a\Theta_{b-a}\Theta_{-b}\Theta_{a'}\Theta_{-a'},$$

qui ne dépendra ni de n, ni de n'; ce produit sera multiplié par un coefficient qui dépendra de ξ, de n et de n' et qui sera de la forme

$$R(\xi + n)R'(\xi + n'),$$

R et R' étant rationnels. Nous aurons donc à calculer

$$\sum R(\xi + n)\ R'(\xi + n'),$$

en donnant à n et à n' toutes les combinaisons de valeurs possibles, en excluant seulement celles pour lesquelles la différence $n - n'$ prend certaines valeurs particulières; car une des quantités n, $n + a$, $n + b$, ne doit pas être égale à une des quantités n', $n' + a'$.

Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ soient les différentes valeurs que ne doit pas prendre $n'-n$; l'expression à évaluer,

$$\sum R(\xi+n)\, R'(\xi+n'),$$

pourra s'écrire

$$\sum R(\xi+n) \sum R'(\xi+n) - \sum P(\xi+n, \alpha_1) - \ldots - \sum P(\xi+n, \alpha_p),$$

où

$$P(\xi, \alpha_i) = R(\xi)\, R'(\xi+\alpha_i).$$

Chacune des sommes qui figurent dans cette expression est de la forme $\sum R(\xi+n)$ et peut s'évaluer comme nous venons de l'expliquer.

On peut voir que $\square(\xi)$ est de la forme

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \square(\xi) = A + B \cot\frac{\pi}{2}(\xi+q) + C \cot\frac{\pi}{2}(\xi-q) \\ + D \cot\frac{\pi}{2}(\xi+q) \cot\frac{\pi}{2}(\xi-q), \end{aligned} \right.$$

A, B, C, D étant développables suivant les puissances de Θ_1, $\Theta_2, \ldots$, et les coefficients de ce développement étant des fonctions rationnelles de q.

Nous avons trouvé, d'autre part,

$$\square(\xi) = \frac{\cos\pi\xi - \cos\pi g}{\cos\pi\xi - \cos\pi q}$$

et

$$F(\pi) = \cos\pi g = H \cos q\pi + H' \sin q\pi,$$

H et H' étant comme A, B, C, D des séries procédant suivant les puissances de $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$, et avec des coefficients rationnels en q. On a donc

$$\square(\xi) = 1 + \frac{(1-H)\cos q\pi - H' \sin q\pi}{\cos\pi\xi - \cos\pi q}.$$

Il suffit pour retomber sur le développement (12) de remplacer

$$(\cos\pi\xi - \cos\pi q), \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} q\pi$$

par

$$2\sin\frac{\pi}{2}(\xi+q)\sin\frac{\pi}{2}(\xi-q), \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[\frac{\pi}{2}(\xi+q) - \frac{\pi}{2}(\xi-q)\right],$$

de façon à tout exprimer en fonction des lignes trigonométriques des deux angles $\frac{\pi}{2}(\xi \pm q)$.

338. Il reste à déterminer les coefficients b_k. Pour cela reprenons le déterminant $\square(\xi)$ et remplaçons-y dans la ligne de rang zéro

$$\ldots, \quad \frac{\Theta_{-2}}{q^2-\xi^2}, \quad \frac{\Theta_{-1}}{q^2-\xi^2}, \quad 1, \quad \frac{\Theta_1}{q^2-\xi^2}, \quad \ldots$$

par des indéterminées

$$\ldots, \quad x_{-2}, \quad x_{-1}, \quad x_0, \quad x_1, \quad \ldots;$$

le déterminant continuera à converger pourvu que les indéterminées soient limitées (cf. *Méthodes nouvelles*, t. II, Chap. XVII, p. 265). Il sera de la forme

$$\Delta = \ldots + B_{-1}x_{-1} + B_0x_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots,$$

les B étant des fonctions de ξ, qui admettent les mêmes pôles simples que $\square(\xi)$ sauf $\xi = \pm q$; de telle sorte que

$$B_j(\cos\pi\xi - \cos\pi q)$$

est une fonction entière.

Je dis que, pour $\xi = g$, on a $B_k = b_k$; il suffit pour cela de démontrer que les B_k satisfont aux équations (8), c'est-à-dire que Δ s'annule quand on y remplace x_j par 1 et $x_k (j \gtrless k)$ par

$$\frac{\Theta_{j-k}}{\Theta_0 - (2j+g)^2}.$$

C'est ce qui arrive car, pour $j \gtrless 0$, on obtient ainsi un déterminant ayant deux lignes identiques; et, pour $j = 0$, on obtient le déterminant $\square(g)$ qui est nul. C. Q. F. D.

339. Nous pouvons nous rendre compte de l'ordre de grandeur des coefficients b_k. Pour cela reprenons les équations (5) et cherchons à former à l'aide de ces équations non plus la solution $F(\tau)$, mais la solution

$$z = e^{ig\tau}\psi(\tau) = \sum b_k \zeta^{g+2k}.$$

Nous observerons alors que $\Theta_0 - \Theta$ est développable suivant les

puissances de m, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$; et je dis qu'il en sera de même de $z\zeta^{-g}$.

Si l'on intégrait les équations (5) par approximations successives, on verrait, par une analyse toute pareille à celle du n° 334, que z se présente sous la forme suivante,

$$\sum \beta_{k.\mu} \tau^{\mu} \zeta^{q+2k},$$

de sorte que $z\zeta^{-q}$ est développable suivant les puissances de m, de τ, de ζ^2 et de ζ^{-2}; je me propose d'établir que $z\zeta^{-q}$ est développable suivant les puissances de m, τ, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$; cela peut se démontrer par récurrence, car les équations (5) montrent que, si cela est vrai pour z_{k-1}, cela le sera également pour z_k.

De cela il résulte que b_k contient en facteur m^{2k}, ce qui montre que les coefficients b_k doivent décroître rapidement.

340. Nous avons vu que g définit le mouvement moyen du nœud, mais nous n'avons qu'une première approximation.

En effet nous avons négligé E_1, E_3, α et le carré de E_2.

Le véritable mouvement du nœud peut, d'après le Chapitre XXIV, se développer suivant les puissances de

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad \alpha^2,$$

et $g(n_1 - n_2)$ ne nous donne que les termes de degré zéro de ce développement.

CHAPITRE XXVII.

MOUVEMENT DU PÉRIGÉE.

341. Je suppose qu'on ait un système quelconque d'équations différentielles; pour simplifier, je supposerai deux équations seulement et deux inconnues x et y, et j'écrirai ces deux équations sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} F\,(x, y, x', y', x'', y'', \alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ F_1(x, y, x', y', x'', y'', \alpha_1, \alpha_2) = 0, \end{cases}$$

où α_1 et α_2 représentent deux paramètres très petits.

Je suppose qu'on sache trouver une solution particulière S des équations (1) en supposant $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; je me propose d'en déduire, pour les petites valeurs de α_1 et de α_2, *toutes* les solutions peu différentes de la solution S (il y en aura évidemment si α_1 et α_2 sont très petits).

Je me propose de développer ces solutions suivant les puissances des paramètres α et de certaines constantes d'intégration β_1, β_2, β_3, β_4 qui s'annulent pour S.

Nous connaissons déjà les termes de degré zéro de ce développement et nous voulons déterminer successivement les termes de degré 1, de degré 2, etc.

Soient $x = x_0$, $y = y_0$ la solution S et posons

$$X = \frac{d}{dx_0} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0, 0, 0),$$

cette dérivée étant calculée en regardant $x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0$ comme des variables indépendantes,

$$Y = \frac{dF}{dy_0}, \qquad X' = \frac{dF}{dx'_0}, \qquad \ldots,$$
$$X_1 = \frac{dF_1}{dx_0}, \qquad \ldots.$$

Supposons qu'on ait trouvé le développement exact jusqu'aux termes du $k^{\text{ième}}$ ordre inclusivement et soit

$$x = x_k, \qquad y = y_k$$

ce développement; si nous substituons ce développement à la place de x et de y dans les équations (1), les premiers membres devront s'annuler aux quantités près du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre. Donc

$$F(x_k, y_k), \quad F_1(x_k, y_k)$$

seront des fonctions *connues* dont le développement commencera par des termes d'ordre $k+1$.

Soient maintenant

$$x = x_k + \delta x, \qquad y = y_k + \delta y,$$

et supposons que nous voulions calculer δx et δy jusqu'aux termes du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement et en négligeant ceux du $(k+2)^{\text{ième}}$ ordre.

$$F(x, y) = F(x_k + \delta x, y_k + \delta y)$$

pourra se développer par la formule de Taylor, sous la forme

$$F(x_k, y_k) + \sum \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F}{dx^2}\delta x^2 + \ldots.$$

Les termes en δx^2 (de même que ceux en $\delta x\,\delta y$, $\delta x\,\delta x'$, etc.) sont négligeables, car δx^2 est d'ordre $2k+2$.

Dans le coefficient de δx, nous pouvons faire

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Cela donne une erreur du premier ordre dans le coefficient $\frac{dF}{dx}$ et, par conséquent, une erreur d'ordre $k+2$ dans le produit $\frac{dF}{dx}\delta x$, puisque δx est d'ordre $k+1$. Cela revient à remplacer

$$\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dF}{dx'}, \quad \ldots$$

par

$$X, \quad Y, \quad X', \quad \ldots.$$

Il reste donc (avec ce degré d'approximation)

$$F(x, y) = F(x_k, y_k) + \sum X\,\delta x,$$

en posant

$$\sum X\,\delta x = X\,\delta x + Y\,\delta y + X'\,\delta x' + Y'\,\delta y' + X''\,\delta x'' + Y''\,\delta y'',$$

de sorte que les équations (1) deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum X\ \delta x = -F\ (x_k, y_k), \\ \sum X_1\,\delta x = -F_1(x_k, y_k); \end{cases}$$

les seconds membres sont connus de même que les X, de sorte que les équations (2) sont des équations linéaires à second membre. *Les premiers membres demeurent les mêmes à toutes les approximations.*

Supposons en particulier qu'on veuille déterminer les termes de degré 1, en supposant $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; les seconds membres deviennent alors (pour la première équation, par exemple)

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0, \alpha_1, \alpha_2),$$

ou, puisque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$,

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0, 0, 0).$$

Mais cette expression est nulle, puisque

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

est une solution des équations (1) pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Les équations (2) deviennent donc

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum X\ \delta x = 0, \\ \sum X_1\,\delta x = 0. \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires *sans second membre.*

Mais on sait que, pour intégrer des équations linéaires avec second membre, il suffit de savoir intégrer les équations sans second membre; on n'a plus à effectuer ensuite que de simples quadratures.

Donc, *quand on saura déterminer les termes de degré* 0 *et ceux de degré* 1, *pour* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ [c'est-à-dire quand on

saura intégrer les équations (3)], *on saura déterminer par quadratures les termes de degré supérieur quels que soient* α_1 *et* α_2.

Les équations (3) ont reçu le nom d'*équations aux variations* (cf. *Méthodes nouvelles*, t. I, Chap. IV).

Dans le cas qui nous occupe, ce sont la parallaxe α et l'excentricité solaire E_3 qui jouent le rôle des paramètres α_1 et α_2; le rôle des constantes β est joué par

$$E_1 e^{i\varpi_1},\quad E_1 e^{-i\varpi_1},\quad E_2 e^{i\varpi_2},\quad E_2 e^{-i\varpi_2}. \tag{4}$$

Nous avons déjà déterminé au Chapitre XXV les termes de degré 0; il nous reste donc à déterminer les termes de degré 1 par rapport aux constantes (4), c'est-à-dire par rapport à E_1 et à E_2, en supposant

$$\alpha = E_3 = 0;$$

on n'aura plus ensuite à effectuer que de simples quadratures. Au Chapitre XXVI, nous avons calculé les termes de degré 1 par rapport à E_2; nous avons maintenant à calculer les termes de degré 1 par rapport à E_1.

Tel est le principe qui va nous servir à calculer les différents termes de nos développements; nous verrons dans les Chapitres suivants quelles modifications de détail il convient d'apporter à ce principe pour qu'il s'adapte parfaitement à notre objet.

342. Voulant calculer les termes de degré 1 par rapport à E_1, nous devons faire

$$E_2 = E_3 = \alpha = 0;$$

nous retombons donc sur les équations du Chapitre XXV; nous avons d'abord $z = 0$, puis les équations (4) du n° 324 :

$$\left\{\begin{aligned} &x'' - 2my' - 3m^2x + \frac{\varkappa x}{r^3} = 0,\\ &y'' + 2mx' \qquad\quad + \frac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous avons trouvé plus haut au Chapitre XXV une solution particulière de ces équations (5), soit

$$x = x_0, \quad y = y_0;$$

il s'agit d'en trouver une solution plus approchée

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y,$$

en négligeant le carré de E_1 et par conséquent celui de δx et δy. Formons donc les équations aux variations des équations (5); il viendra

$$(6) \qquad \begin{cases} \delta x'' - 2m\,\delta y' - 3m^2\,\delta x + A\,\delta x + B\,\delta y = 0, \\ \delta y'' + 2m\,\delta x' \qquad\qquad + B\,\delta x + C\,\delta y = 0, \end{cases}$$

en posant

$$A = \frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right), \qquad B = \frac{d^2}{dx\,dy}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right), \qquad C = \frac{d^2}{dy^2}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right)$$

et en remplaçant bien entendu dans A, B, C, après différentiation, x et y par x_0 et y_0.

Les équations (6) sont des équations différentielles linéaires en δx et δy, puisque A, B, C sont des fonctions connues. Le système formé de deux équations du deuxième ordre est du quatrième ordre; il admettra donc quatre solutions indépendantes. Deux de ces quatre solutions sont déjà connues. En effet, les solutions du Chapitre XXV,

$$x = x_0, \qquad y = y_0,$$

dépendent en réalité de deux constantes arbitraires; nous avons trouvé en effet pour x_0 une solution de la forme

$$x_0 = \varphi(\tau, m)$$

et de même pour y_0. Or

$$\tau = (n_1 - n_2)t, \qquad m = \frac{n_2}{n_1 - n_2}.$$

La solution continuera à convenir si l'on change t en $t + \varepsilon$, de sorte qu'il reste

$$x_0 = \varphi\left[(n_1 - n_2)(t + \varepsilon), \frac{n_2}{n_1 - n_2}\right]$$

avec deux constantes arbitraires ε et n_1, ou bien

$$x_0 = \varphi\left[\frac{n_2}{m}(t + \varepsilon), m\right].$$

Nos équations aux variations (6) admettront donc comme solutions particulières

$$\delta x = \frac{dx_0}{d\varepsilon}, \qquad \delta y = \frac{dy_0}{d\varepsilon},$$

$$\delta x = \frac{dx_0}{dm}, \qquad \delta y = \frac{dy_0}{dm},$$

en prenant pour variables indépendantes t, ε et m, ou bien en revenant aux variables indépendantes τ et m,

$$(7) \quad \begin{cases} \delta x = -\dfrac{n_2}{m}\dfrac{dx_0}{d\tau}, & \delta y = -\dfrac{n_2}{m}\dfrac{dy_0}{d\tau}, \\ \delta x = -\dfrac{\tau}{m}\dfrac{dx_0}{d\tau} + \dfrac{dx_0}{dm}, & \delta y = -\dfrac{\tau}{m}\dfrac{dy_0}{d\tau} + \dfrac{dy_0}{dm} \end{cases}$$

Inutile d'ajouter que, dans la première ligne de (7), on pourrait supprimer le facteur constant en n_2 et m, puisque les équations sont linéaires.

Connaissant deux solutions particulières d'un système du quatrième ordre, on sait qu'on peut ramener ce système au deuxième ordre; mais il vaut mieux opérer autrement, parce que la seconde solution (7) n'est pas périodique.

Partons donc de l'intégrale de Jacobi

$$\frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{3m^2}{2} x^2 - \frac{\varkappa}{r} = C,$$

et formons-en l'équation aux variations.

Si nous supposons $\delta C = 0$, de façon à éliminer la seconde équation (7), il viendra

$$x'_0\,\delta x' + y'_0\,\delta y' - 3m^2 x_0\,\delta x + \frac{\varkappa x_0}{r_0^3}\,\delta x + \frac{\varkappa y_0}{r_0^3}\,\delta y = 0,$$

ou, puisque x_0 et y_0 satisfont aux équations (5),

$$(8) \quad x'_0\,\delta x' + y'_0\,\delta y' - (x''_0 - 2my'_0)\,\delta x - (y''_0 + 2mx'_0)\,\delta y = 0.$$

On vérifiera sans peine que la première solution (7) satisfait bien à (8).

Combinons alors la première équation (6) avec (8); nous aurons un système (9) qui sera du troisième ordre, et qui admettra comme

solution particulière

$$\delta x = \frac{dx_0}{d\tau} = x'_0, \qquad \delta y = \frac{dy_0}{d\tau} = y'_0.$$

Grâce à la connaissance de cette solution particulière nous pouvons ramener le système au deuxième ordre. Posons en effet

$$(\delta x + i\,\delta y) = (\xi + i\eta)(x'_0 + iy'_0),$$

avec son imaginaire conjuguée, et prenons pour nouvelles variables ξ et η. Alors, nos équations admettent comme solution particulière

$$\delta x = x'_0, \qquad \delta y = y'_0,$$

d'où

$$\xi + i\eta = \xi - i\eta = 1, \qquad \xi = 1, \qquad \eta = 0;$$

donc ξ satisfait à une équation linéaire du troisième ordre, qui admet pour solution particulière 1, et η à une équation du deuxième ordre de la forme

$$\eta'' + H\eta' + K\eta = 0; \tag{10}$$

pour ramener cette équation à la forme canonique, posons

$$\eta = \rho\varphi(\tau),$$

ρ étant notre nouvelle inconnue, et φ une fonction périodique de τ, telle que

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + H = 0.$$

Alors ρ satisfait à une équation du deuxième ordre de la forme

$$\rho'' + \Theta\rho = 0, \tag{11}$$

où Θ est une fonction connue de τ.

343. Il nous faut maintenant montrer que cette équation (11) est de même forme que l'équation (1) du Chapitre précédent, c'est-à-dire que Θ est une fonction paire de τ, périodique de période π et toujours finie.

Dans les équations (6), les coefficients A, B, C sont des fonctions périodiques, de sorte que ces équations ne changent pas quand on change τ en $\tau + \pi$. Si donc nous désignons pour un

instant par $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, ξ_1, η_1 ce que deviennent δx, δy, ξ, η quand on change τ en $\tau+\pi$, et si δx, δy est une solution, il en sera de même de $\delta_1 x$, $\delta_1 y$. Mais nous avons

$$\delta x + i\,\delta y = (\xi + i\eta)(x'_0 + iy'_0),$$

avec sa conjuguée. Si dans cette équation je change τ en $\tau+\pi$,

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \xi,\quad \eta,\quad x'_0,\quad y'_0$$

se changeront en

$$\delta_1 x,\quad \delta_1 y,\quad \xi_1,\quad \eta_1,\quad -x'_0,\quad -y'_0,$$

d'où

$$\delta_1 x + i\delta_1 y = -(\xi_1 + i\eta_1)(x'_0 + iy'_0),$$

ce qui montre que, si ξ, η est une solution, il en est de même de $-\xi_1$, $-\eta_1$ et par conséquent de ξ_1, η_1; ce qui veut dire que les équations en ξ et en η ne changent pas quand on change τ en $\tau+\pi$. Donc, dans l'équation (10), H et K sont périodiques.

Si l'on change τ en $-\tau$ et δy en $-\delta y$ les équations (6) ne changent pas, car A, B, C se changent en A, $-$B et C. D'autre part, x'_0 et y'_0 se changent en $-x'_0$ et y'_0. Donc

$$\xi + i\eta = \frac{\delta x + i\,\delta y}{x'_0 + iy'_0}$$

se change en

$$-\frac{\delta x - i\delta y}{x'_0 - iy'_0} = -\xi + i\eta,$$

ce qui veut dire que ξ change de signe et que η ne change pas. L'équation (10) ne doit donc pas changer, ce qui veut dire que K est une fonction paire et H une fonction impaire de τ.

Si nous reprenons l'équation

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + \mathrm{H} = 0,$$

nous verrons que

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{H}\,d\tau}.$$

Or H est une fonction périodique et sa valeur moyenne est nulle puisque c'est une fonction impaire; donc $\int \mathrm{H}\,d\tau$, et par conséquent, φ est une fonction périodique et paire. On en conclura

que Θ est une fonction périodique et paire. Nous verrons d'ailleurs bientôt la façon de déterminer complètement φ.

Il reste à montrer que Θ est toujours finie. Pour cela nous remarquerons que δx et δy sont finis; donc

$$\xi + i\eta = \frac{\delta x + i\delta y}{x'_0 + iy'_0}$$

ne pourrait devenir infini, τ étant réel, que si l'on avait à la fois

$$x'_0 = y'_0 = 0,$$

ce qui ne peut arriver, les trajectoires fermées de la Lune (rapportées aux axes tournants), étudiées au Chapitre XXV, ne présentant de point de rebroussement que pour $\frac{1}{m} = 1,78$.

Il faudrait faire voir maintenant que φ et par conséquent Θ sont finis; pour cela nous allons déterminer φ, mais il est nécessaire de reprendre la chose d'un peu plus haut.

344. Il serait facile de déterminer φ en faisant le calcul tout au long, mais il est plus instructif de procéder autrement. Les équations (6) admettent quatre intégrales linéairement indépendantes; nous connaissons déjà deux d'entre elles qui sont les intégrales (7).

Les deux autres, d'après les propriétés générales des équations linéaires à coefficients périodiques, seront de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} \delta x + i\,\delta y = \sum b_k \zeta^{c+2k+1}, \\ \delta x - i\,\delta y = \sum c_k \zeta^{c+2k+1}, \end{cases}$$

et, en changeant τ en $-\tau$ et δy en $-\delta y$, ce qui ne change pas les équations,

$$(12\ bis) \qquad \begin{cases} \delta x - i\,\delta y = \sum b_k \zeta^{-c-2k-1}, \\ \delta x + i\,\delta y = \sum c_k \zeta^{-c-2k-1}. \end{cases}$$

En additionnant ces solutions, on trouverait une solution réelle

$$\delta x = \sum (b_k + c_k) \cos[\varpi_3 + \varpi_1 + (2k+1)\tau],$$

$$\delta y = \sum (b_k - c_k) \sin[\varpi_3 + \varpi_1 + (2k+1)\tau];$$

les coefficients b_k et c_k sont réels. Le nombre c nous fait connaître le mouvement du périgée de même que le nombre g nous faisait connaître celui du nœud, la remarque du n° 340 restant applicable. On pose

$$w_1 + w_3 = c\tau + \varepsilon,$$

ε étant une constante arbitraire et w_3 représentant la quantité

$$w_3 = w'_1 = n_3 t + \varpi_3$$

définie au Chapitre XXIV avec les conditions

$$c = \frac{n_3 + n_1}{n_1 - n_2}, \qquad \varepsilon = \varpi_3, \qquad c = 1 + m + \frac{n_3}{n_1 - n_2}.$$

Entre les quatre solutions (7), (12) et (12 *bis*) existent certaines relations bilinéaires dont nous allons indiquer l'origine.

Considérons un système d'équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx}; \tag{13}$$

d'après le théorème du n° 16, rappelé au n° 318, il existe une fonction Ω telle qu'on ait

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum A\,d\alpha - F\,dt,$$

les A dépendant seulement des constantes d'intégration α; on aura donc, par exemple,

$$\sum x \frac{dy}{d\alpha_1} = \frac{d\Omega}{d\alpha_1} + A_1,$$

$$\sum x \frac{dy}{d\alpha_2} = \frac{d\Omega}{d\alpha_2} + A_2.$$

Si nous différentions la première par rapport à α_2, la seconde par rapport à α_1, il viendra

$$\sum \frac{dx}{d\alpha_2}\frac{dy}{d\alpha_1} + \sum x \frac{d^2 y}{d\alpha_1\, d\alpha_2} = \frac{d\Omega}{d\alpha_1\, d\alpha_2} + \frac{dA_1}{d\alpha_2},$$

$$\sum \frac{dx}{d\alpha_1}\frac{dy}{d\alpha_2} + \sum x \frac{d^2 y}{d\alpha_1\, d\alpha_2} = \frac{d\Omega}{d\alpha_1\, d\alpha_2} + \frac{dA_2}{d\alpha_1},$$

ou, en retranchant,

$$\sum\left(\frac{dx}{d\alpha_2}\frac{dy}{d\alpha_1}-\frac{dx}{d\alpha_1}\frac{dy}{d\alpha_2}\right)=\frac{dA_1}{d\alpha_2}-\frac{dA_2}{d\alpha_1}.$$

Comme les A ne dépendent que des constantes d'intégration, le second membre se réduit à une constante.

Supposons qu'on forme les équations aux variations des équations (13); nous obtiendrons deux solutions particulières de ces équations en faisant

$$\delta x=\frac{dx}{d\alpha_1},\qquad \delta y=\frac{dy}{d\alpha_1}$$

et

$$\delta x=\frac{dx}{d\alpha_2},\qquad \delta y=\frac{dy}{d\alpha_2},$$

et nous obtiendrons ainsi toutes les solutions indépendantes de ces équations aux variations. Si donc

$$\delta x=\xi,\qquad \delta y=\eta,\qquad \delta x=\xi^*,\qquad \delta y=\eta^*$$

sont deux solutions quelconques de ces équations, on aura entre elles la relation bilinéaire

$$\sum(\xi\eta^*-\eta\xi^*)=\text{const.}$$

Nous pouvons appliquer ces principes aux équations qui nous occupent, puisque les équations (4) et (6) du Chapitre XXV dérivent directement des équations canoniques (1). Les variables conjuguées sont alors

$$(x,\ X),\quad (y,\ Y)$$

et leurs variations sont

$$\delta x,\qquad \delta X=\delta\frac{dx}{dt}-n_2\,\delta y=(n_1-n_2)(\delta x'-m\,\delta y),$$

$$\delta y,\qquad \delta Y=\delta\frac{dy}{dt}+n_2\,\delta x=(n_1-n_2)(\delta y'+m\,\delta x).$$

Soit alors

$$\delta x=\delta_1 x,\qquad \delta X=\delta_1 X,\qquad \delta y=\delta_1 y,\qquad \delta Y=\delta_1 Y$$

une solution particulière des équations aux variations, et repré-

sentons de même par des indices 2 une seconde solution particulière; on aura

$$(\delta_1 x \delta_2 X - \delta_1 X \delta_2 x) + (\delta_1 y \delta_2 Y - \delta_1 Y \delta_2 y) = \text{const.},$$

ou, en remplaçant δX, δY par leurs valeurs et divisant par $n_1 - n_2$,

$$(14)\quad \begin{cases} (\delta_1 x \delta_2 x' - \delta_2 x \delta_1 x') \\ \quad + (\delta_1 y \delta_2 y' - \delta_2 y \delta_1 y') + 2m(\delta_1 y \delta_2 x - \delta_2 y \delta_1 x) = \text{const.} \end{cases}$$

La constante du second membre est nulle si les deux solutions δ_1 et δ_2 sont identiques; elle est nulle encore si l'on combine une des solutions (7) avec une des solutions (12) ou (12 *bis*). Si l'on combine en effet la seconde solution (7) avec (12), le premier membre de (14) ne contiendra que des termes en

$$\tau \zeta^{c+n} \quad \text{ou} \quad \zeta^{c+n} \qquad (n \text{ étant entier}).$$

Aucun de ces termes ne peut être constant à moins d'être nul.

D'autre part, si nous considérons une solution δ_1, la constante du second membre ne peut être nulle, quelle que soit la solution δ_2; sans cela on aurait entre les quatre quantités

$$\delta_1 x, \quad \delta_1 y, \quad \delta_1 x', \quad \delta_1 y'$$

quatre relations homogènes du premier degré dont le déterminant n'est pas nul, et ces quatre quantités devraient s'annuler à la fois.

Nous devrons donc conclure que la constante du second membre n'est pas nulle quand on combine entre elles les deux solutions (7) ou les deux solutions (12), (12 *bis*).

345. Que devient la relation (14) quand on fait subir à nos équations les transformations du n° 342? Il est clair que nous allons avoir une relation bilinéaire entre deux solutions quelconques des équations transformées

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \xi'_1, \quad \eta'_1,$$
$$\xi_2, \quad \eta_2, \quad \xi'_2, \quad \eta'_2.$$

Cette relation bilinéaire devra être évidemment satisfaite, la constante du second membre étant nulle quand l'une de ces deux solutions correspondra à la première solution (7), c'est-à-dire quand

on fera

$$\xi_1 = 1, \qquad \xi'_1 = \eta_1 = \eta'_1 = 0,$$

ou bien

$$\xi_2 = 1, \qquad \xi'_2 = \eta_2 = \eta'_2 = 0.$$

Nous en devons conclure que ξ_1 et ξ_2 ne doivent pas figurer dans notre relation bilinéaire; nous aurons donc une relation bilinéaire entre

$$\xi'_1, \quad \eta_1, \quad \eta'_1,$$
$$\xi'_2, \quad \eta_2, \quad \eta'_2.$$

Si, dans la relation (14), nous prenons pour la solution δ_1 la première solution (7), nous retomberons sur l'équation (8) déduite plus haut de l'intégrale de Jacobi. Transformons cette équation (8) en faisant

$$\delta x + i\,\delta y = (\xi + i\eta)(x' + iy');$$

elle deviendra

$$(15) \qquad \frac{\xi'}{2\eta} = \frac{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0}{x'^2_0 + y'^2_0} - m.$$

Si, en partant de cette équation (15), nous remplaçons ξ'_1 et ξ'_2 en fonctions de η_1 et η_2, il restera une simple relation bilinéaire entre

$$\eta_1, \quad \eta'_1, \quad \eta_2, \quad \eta'_2,$$

qui devra être de la forme

$$\psi(\tau)(\eta_1\eta'_2 - \eta_2\eta'_1) = \text{const.},$$

$\psi(\tau)$ étant une fonction connue de τ; il est d'ailleurs aisé de voir que

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\varphi^2(\tau)},$$

cette fonction φ étant celle du n° 342.

346. Reprenons les équations (6) et passons aux variables ξ et η; nous aurons deux équations linéaires entre

$$\xi'', \quad \eta'', \quad \xi', \quad \eta', \quad \xi, \quad \eta,$$

où ξ ne figurera pas puisqu'elles doivent être satisfaites pour $\xi = 1$, $\eta = 0$.

Multiplions-les par $-y'_0$ et x'_0 et ajoutons de façon à éliminer ξ''; il restera

$$\eta'', \quad \xi', \quad \eta', \quad \eta;$$

remplaçons ensuite ξ' en fonction de η à l'aide de l'équation (15); on trouvera ainsi

$$(16) \qquad \eta''(x_0'^2 + y_0'^2) + 2\eta'(x'_0 x''_0 + y'_0 y''_0) + M\eta = 0,$$

M étant une fonction connue de τ; si nous comparons à l'équation (10), nous trouverons

$$H = 2\frac{x'_0 x''_0 + y'_0 y''_0}{x_0'^2 + y_0'^2},$$

d'où

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}.$$

Nous en conclurons d'abord que φ ne peut devenir ni nul ni infini, par conséquent que ρ reste fini, et enfin que Θ (qu'il est d'ailleurs aisé de former) est toujours fini, car, si Θ devenait infini, l'une des deux intégrales de l'équation (11) devrait devenir infinie.

Donc l'équation (11) est de même forme que l'équation (1) du Chapitre XXVI, et tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre devient applicable. On peut se servir en particulier du déterminant de Hill pour calculer le mouvement du périgée. La seule différence c'est que Θ_1 est notablement plus grand, et il en résulte deux choses : d'abord la convergence du développement est moins rapide que pour le mouvement du nœud et c'est ce qui explique les circonstances qui avaient tant étonné les mathématiciens du XVIII^e siècle; ensuite certaines inégalités ont un coefficient notable. C'est ainsi qu'à côté des termes en b_0 et c_0 qui représentent les termes principaux de l'*équation du centre,* nous avons les termes en b_{-1} et c_1 qui nous donnent la grande inégalité connue sous le nom d'*évection.*

347. On peut obtenir immédiatement un système du second ordre auquel satisfont δx et δy, je veux dire les solutions (12) et (12 *bis*) qui nous intéressent. Reprenons en effet la relation bilinéaire (14), et imaginons que $\delta_2 x$, $\delta_2 y$ (que nous désignerons simplement par δx, δy en supprimant l'indice 2) représentent

l'une des solutions (12) ou (12 *bis*) et que $\delta_1 x$, $\delta_1 y$ représentent une des solutions (7); la constante du second membre sera nulle, mais les solutions (7) peuvent être regardées comme connues, cela va donc nous donner une relation linéaire entre δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$; comme nous avons deux solutions (7), cela va nous donner un système de deux équations différentielles du premier ordre entre δx et δy.

Prenons d'abord la première solution (7),

$$\delta_1 x = \frac{dx_0}{d\tau} = x'_0, \qquad \delta_1 y = \frac{dy_0}{d\tau} = y'_0,$$

d'où

$$\delta_1 x' = x''_0, \qquad \delta_1 y' = y''_0;$$

nous trouverons

$$x'_0\,\delta x' + y'_0\,\delta y' - x''_0\,\delta x - y''\,\delta y + 2m(y'_0\,\delta x - x'_0\,\delta y) = 0. \tag{16}$$

Prenons ensuite la seconde solution (7),

$$\delta_1 x = -\frac{\tau}{m}x'_0 + \frac{dx_0}{dm}, \qquad \delta_1 y = -\frac{\tau}{m}y'_0 + \frac{dy_0}{dm},$$

d'où

$$\delta_1 x' = -\frac{\tau}{m}x''_0 + \frac{dx'_0}{dm} - \frac{x'_0}{m}, \qquad \delta_1 y' = -\frac{\tau}{m}y''_0 + \frac{dy'_0}{dm} - \frac{y'_0}{m}.$$

Nous trouverons [en tenant compte de la relation (16), en vertu de laquelle les termes en $\frac{\tau}{m}$ se détruisent]

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_0}{dm}\delta x' + \frac{dy_0}{dm}\delta y' - \frac{dx'_0}{dm}\delta x - \frac{dy'_0}{dm}\delta y \\ &\quad + \frac{x'_0\,\delta x + y'_0\,\delta y}{m} + 2m\left(\frac{dy_0}{dm}\delta x - \frac{dx_0}{dm}\delta y\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Il s'agit d'intégrer le système (16), (17). On pourrait chercher à le ramener à la forme canonique, ou bien en faciliter l'intégration par l'emploi de l'artifice du n° 327. Reprenons les équations (3 *bis*) de ce n° 327, que j'écris

$$\left\{\begin{aligned} &x'' - 2py' - \frac{3}{2}p^2 x - \frac{3}{2}m^2 x + \frac{\varkappa x}{r^3} = 0, \\ &y'' + 2px' - \frac{3}{2}p^2 y - \frac{3}{2}m^2 y + \frac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5 bis}$$

Nous pourrons remarquer que ces équations peuvent être déduites d'équations de forme canonique; il suffit de prendre comme variables conjuguées

$$X, \quad Y, \quad x, \quad y$$

avec

$$F = \frac{X^2 + Y^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r} + n_2(Xy - Yx) - n_2^2 \frac{x^2 + y^2}{4} - 3h^2 \frac{x^2 - y^2}{4},$$

de former les équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dX}, \qquad \frac{dX}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \dots,$$

d'éliminer X et Y, et de poser

$$d\tau = (n_1 - n_2)\,dt, \qquad n_2 = p(n_1 - n_2), \qquad h = m(n_1 - n_2),$$

$$\varkappa = \frac{m_1 + m_7}{(n_1 - n_2)^2}.$$

Recommençons sur ces équations (5 *bis*) les mêmes raisonnements que sur les équations (5).

Les équations (5 *bis*) admettront le système de solutions périodiques formées au Chapitre XXV et que nous écrirons

$$x_0 = \varphi(\tau, p, m), \qquad y_0 = \varphi_1(\tau, p, m).$$

Nous formerons les équations aux variations analogues aux équations (6) en posant

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y.$$

Ces équations admettraient des solutions analogues aux équations (7) qu'on obtiendrait en différentiant, par rapport aux deux constantes d'intégration ε et n_1, l'expression

$$x_0 = \varphi\left[(n_1 - n_2)(t + \varepsilon), \frac{n_2}{n_1 - n_2}, \frac{h}{n_1 - n_2}\right],$$

d'où les deux solutions particulières

$$\delta x = \frac{dx_0}{d\varepsilon} = (n_1 - n_2)\frac{dx_0}{d\tau},$$

$$\delta x = \frac{dx_0}{dn_1} = (t + \varepsilon)\frac{dx_0}{d\tau} - \frac{n_2}{(n_1 - n_2)^2}\frac{dx_0}{dp} - \frac{h}{(n_1 - n_2)^2}\frac{dx_0}{dm},$$

ou, en supprimant des facteurs constants,

$$\delta x = x'_0, \qquad \delta x = -\tau \frac{dx_0}{d\tau} + p \frac{dx_0}{dp} + m \frac{dx_0}{dm},$$

qui remplacent les solutions (7).

Dans ces conditions, (16) et (17) deviennent

$$(16\ bis) \qquad \sum x'_0\, \delta x' - \sum x''_0\, \delta x + 2p(y'_0\, \delta x - x'_0\, \delta y) = 0,$$

$$(17\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \left(m \frac{dx_0}{dm} + p \frac{dx_0}{dp}\right) \delta x' - \sum \left(m \frac{dx'_0}{dm} + p \frac{dx'_0}{dp}\right) \delta x \\ & + \sum x'_0\, \delta x + 2pm\left(\frac{dy_0}{dm}\, \delta x - \frac{dx_0}{dm}\, \delta y\right) + 2p^2\left(\frac{dy_0}{dp}\, \delta x - \frac{dx_0}{dp}\, \delta y\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

On va ensuite chercher à développer suivant les puissances de m^2, et il arrivera alors la même circonstance signalée à la fin du n° 328 que le développement du coefficient d'un même terme procédera suivant les puissances non de m^2, mais de m^4.

Mais, pour $m = 0$, on a simplement

$$x_0 = A \cos\tau, \qquad y_0 = A \sin\tau,$$

A étant une fonction de p facile à former; il vient donc

$$x'_0 = -A \sin\tau, \qquad y'_0 = A \cos\tau,$$

$$p \frac{dx_0}{dp} = B \cos\tau, \qquad p \frac{dy_0}{dp} = B \sin\tau,$$

en posant pour abréger

$$B = p \frac{dA}{dp}.$$

Soient alors

$$F(x_0, y_0, m), \qquad F_1(x_0, y_0, m)$$

les premiers membres des équations (16 *bis*) et (17 *bis*) que j'écris sans mettre en évidence ni p, ni les inconnues δx, δy et leurs dérivées. Nous désignerons de même par

$$F(A \cos\tau, A \sin\tau, 0)$$

ce que devient $F(x_0, y_0, m)$ quand on y remplace m par zéro, x_0 et y_0 par leurs valeurs approchées $A \cos\tau$, $A \sin\tau$, et par consé-

quent x'_0, y'_0, $\frac{dx_0}{dp}$, $\frac{dy_0}{dp}$, ... par les valeurs correspondantes. Alors

$$F\,(x_0, y_0, m) - F\,(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = -M,$$
$$F_1(x_0, y_0, m) - F_1(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = -M_1$$

contiendront m^2 en facteur. Les équations (16 *bis*) et (17 *bis*) pourront alors s'écrire

$$(18)\qquad \begin{cases} F\,(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = M, \\ F_1(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = M_1, \end{cases}$$

et elles pourront s'intégrer par approximations successives; on négligera d'abord m^2, de sorte que les seconds membres seront nuls. Ensuite on remplacera dans les seconds membres δx et δy par leurs premières valeurs approchées, de sorte que les seconds membres seront connus et que les équations (18) se présenteront sous la forme d'équations linéaires à second membre, et l'on obtiendra à l'aide de ces équations de nouvelles valeurs approchées, et ainsi de suite.

On voit aisément que les premiers membres sont de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} A(-\sin\tau\,\delta x' + \cos\tau\,\delta y') + C(\quad\cos\tau\,\delta x + \sin\tau\,\delta y), \\ B(\quad\cos\tau\,\delta x' + \sin\tau\,\delta y') + D(-\sin\tau\,\delta x + \cos\tau\,\delta y'); \end{cases}$$

A et B (déjà définis) de même que C et D sont des coefficients numériques dépendant de p et faciles à former.

Les équations (18) étant des équations linéaires à second membre, il faudrait savoir intégrer les équations linéaires sans second membre, c'est-à-dire les équations obtenues en égalant à zéro les expressions (19). Or, si nous posons

$$\xi = \zeta^{-1}\,\delta u = \zeta^{-1}(\delta x + i\,\delta y),$$
$$\eta = \zeta\quad \delta s = \zeta\quad(\delta x - i\,\delta y),$$

ces équations sans second membre prendront la forme

$$\xi' + \alpha\xi + \beta\eta = 0,$$
$$\eta' + \gamma\xi + \delta\eta = 0,$$

α, β, γ, δ étant des coefficients constants; les équations (18) prendront la forme

$$\xi' + \alpha\xi + \beta\eta = P,$$
$$\eta' + \gamma\xi + \delta\eta = Q,$$

P et Q étant des fonctions connues, équations qui s'intègrent aisément.

348. On peut se servir du système (16 *bis*), (17 *bis*) et du procédé d'approximations successives que nous venons d'exposer pour la détermination de c et des coefficients b_k et c_k. Il suffit d'appliquer les principes du n° 335.

Déterminons, par exemple, par le procédé précédent, la solution particulière des équations (16 *bis*), (17 *bis*), qui, pour $\tau = 0$, donne comme valeurs initiales

$$\delta x = 1, \qquad \delta y = 0.$$

On aura alors

$$\delta x + i\,\delta y = \sum b_k \zeta^{c+2k+1} + \sum c_k \zeta^{-c-2k-1},$$

avec la condition

$$\sum b_k + \sum c_k = 1$$

(que nous pouvons supposer remplie, puisque les *rapports* des coefficients b_k et c_k sont seuls déterminés).

La valeur de δx pour $\tau = \pi$ sera alors

$$-\cos c\pi,$$

ce qui détermine c.

CHAPITRE XXVIII.

TERMES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

---

349. La détermination des termes d'ordre supérieur se fera en appliquant les principes du n° 341. Je suppose qu'on ait déterminé nos coordonnées jusqu'aux termes du $k^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, et soit par exemple $x = x_k$ la valeur approchée ainsi obtenue; posons $x = x_k + \delta x$ et cherchons à déterminer δx jusqu'aux termes du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement; nous serons amenés à former des équations analogues aux équations (2) du n° 341; ce sont des équations linéaires à second membre. Les premiers membres sont toujours les mêmes, quel que soit k. Nous avons appris à intégrer les équations *sans second membre* aux Chapitres XXVI et XXVII, en formant les termes du premier ordre. L'intégration des équations à second membre, et par conséquent la détermination des termes d'ordre supérieur, peut donc s'opérer par de simples quadratures.

Toutefois une complication se présente : nous n'avons pas seulement trois fonctions inconnues qui sont nos coordonnées x, y, z; nous avons encore deux *constantes* inconnues g et c d'où dépendent les mouvements du nœud et du périgée.

Ces deux constantes sont développables suivant les puissances de

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad \alpha^2.$$

Nous n'avons déterminé jusqu'ici aux Chapitres XXVI et XXVII, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 340, que les premiers termes de ces développements, ceux qui sont indépendants des E_i^2 et de α^2.

Supposons alors qu'on ait déterminé g et c jusqu'aux termes du $(k-1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, et soient g_{k-1} et c_{k-1} ces valeurs

approchées; soient ensuite $g_{k-1} + \delta g$, $c_{k-1} + \delta c$ des valeurs plus approchées jusqu'aux termes du $k^{\text{ième}}$ ordre inclusivement; en même temps que δx, δy, δz, il nous faut déterminer δg et δc. Nous ferons cette détermination, comme on le verra dans la suite, de façon à faire disparaître les termes séculaires.

350. Rappelons en quoi consiste la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations à second membre. Considérons pour fixer les idées un système du troisième ordre, formé de trois équations du premier ordre. Soient donc X, Y, Z trois combinaisons linéaires de x, y, z; soient A, B, C trois fonctions connues, x', y', z' les dérivées de x, y, z; nos trois équations pourront s'écrire

$$x' + X = A, \qquad y' + Y = B, \qquad z' + Z = C. \tag{1}$$

Supposons qu'on ait intégré les équations sans second membre

$$x' + X = y' + Y = z' + Z = 0, \tag{2}$$

et soient

$$x = x_i, \qquad y = y_i, \qquad z = z_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

trois solutions indépendantes du système (2). On posera

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

$$y = \sum \lambda_i y_i, \qquad z = \sum \lambda_i z_i,$$

et l'on cherchera à déterminer les nouvelles fonctions inconnues λ_i. Le système (1) deviendra

$$\sum \lambda'_i x_i = A, \qquad \sum \lambda'_i y_i = B, \qquad \sum \lambda'_i z_i = C, \tag{3}$$

et l'on en déduira les λ'_i sous la forme

$$\lambda'_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les α_i, les β_i et les γ_i étant des fonctions connues de t, de sorte que la détermination des λ_i et par conséquent celle de x, y, z sont ramenées à des quadratures. Les fonctions α_i, β_i, γ_i peuvent s'obtenir par l'intégration des équations du premier degré (3).

Tel est le procédé classique, mais il y a des cas où quelques

simplifications sont possibles. Supposons d'abord un système du second ordre au lieu du troisième, de sorte que les équations (3) s'écrivent

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = A, \\ \lambda'_1 y_1 + \lambda'_2 y_2 = B. \end{cases}$$

Supposons qu'on ait entre les solutions du système sans second membre une relation bilinéaire

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = H,$$

H étant une fonction connue de t. On aura

$$\lambda'_1 H = A y_2 - B x_2,$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{y_2}{H}, \qquad \beta_1 = -\frac{x_2}{H},$$

et de même

$$\alpha_2 = -\frac{y_1}{H}, \qquad \beta_2 = \frac{x_1}{H}.$$

Supposons par exemple qu'on ait une équation de la forme

$$x'' + \Theta x = B,$$

ce qu'on peut remplacer par le système

$$x' - y = 0, \qquad y' + \Theta x = B;$$

on aura alors

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1,$$

d'où

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

$$\lambda'_1 = -x_2 B, \qquad \lambda'_2 = x_1 B.$$

351. Supposons un système d'équations canoniques

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dX}, \qquad \frac{dX}{dt} = -\frac{dF}{dx},$$

avec les variables conjuguées

$$\begin{matrix} x, & y, & z, \\ X, & Y, & Z. \end{matrix}$$

Soit x_0, X_0, ... une solution particulière de ces équations;

posons

$$x = x_0 + \delta x, \qquad X = X_0 + \delta X, \qquad \ldots,$$

et, négligeant les carrés de δx, ..., formons les équations aux variations des équations (4); (x), (X), ... étant des fonctions linéaires des six variables x, X, ...; soient

$$(5) \qquad \delta x' + (x) = 0, \qquad \delta X' + (X) = 0, \qquad \ldots$$

ces équations aux variations. Soient

$$\delta x = x_i, \qquad \delta X = X_i \qquad \ldots \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

six solutions indépendantes des équations (5). Considérons maintenant les équations à second membre

$$(6) \qquad \delta x' + (x) = A, \qquad \delta X' + (X) = A^*, \qquad \ldots,$$

où A, A^* sont des fonctions connues. Posons

$$x = \sum \lambda_i x_i, \qquad X = \sum \lambda_i X_i, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\sum \lambda'_i x_i = A, \qquad \sum \lambda'_i X_i = A^*, \qquad \ldots,$$

et

$$\lambda'_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C + \alpha_i^* A^* + \beta_i^* B^* + \gamma_i^* C^*.$$

Il s'agit de déterminer les fonctions α, ...

A cet effet, rappelons-nous qu'on a, d'après le n° 344,

$$(x_i X_k - x_k X_i) + (y_i Y_k - y_k Y_i) + (z_i Z_k - z_k Z_i) = \text{const.},$$

ce que j'écrirai simplement

$$(7) \qquad \sum (x_i X_k - x_k X_i) = \text{const.}$$

On peut choisir les solutions particulières x_i, ... du système (5) de telle façon que la constante du second membre soit égale à 1 pour

$$i = 1, \quad k = 2; \qquad i = 3, \quad k = 4; \qquad i = 5, \quad k = 6,$$

et à zéro dans tous les autres cas.

En se servant alors des équations (7), on trouve aisément

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = X_2, & \beta_1 = Y_2, & \gamma_1 = Z_2, \\ \alpha_1^* = -x_2, & \beta_1^* = -y_2, & \gamma_1^* = -z_2; \\ \alpha_2 = -X_1, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \alpha_2^* = x_1, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{array}$$

et de même

$$\alpha_3 = X_4, \quad \alpha_4 = -X_3; \quad \alpha_5 = X_6, \quad \alpha_6 = -X_5.$$

....

352. Reprenons les équations canoniques (23) du n° 320:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF'}{dX}, \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{dF'}{dx}. \tag{8}$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution exacte jusqu'aux termes du $k^{\text{ième}}$ ordre inclusivement (par rapport aux E et à α). Soit

$$x = x_k, \quad y = y_k, \quad z = z_k, \quad X = X_k, \quad \dots$$

cette solution. Il convient, comme je l'expliquais au début de ce Chapitre, de tenir compte des constantes c et g. Je suppose que nous possédions des valeurs approchées de ces constantes,

$$c = c_{k-1}, \quad g = g_{k-1},$$

exactes jusqu'aux termes du $(k-1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement. Je dis d'abord que l'erreur commise sur les deux membres des équations (8) est du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre. Cela est évident pour les seconds membres, puisque nous y substituons à la place des inconnues des valeurs exactes jusqu'au $k^{\text{ième}}$ ordre exclusivement. Pour les premiers membres, où figurent les constantes c et g, cela exige un peu plus d'attention.

En effet x, par exemple, est une fonction périodique des quatre arguments $w_i = n_i t + \varpi_i$. On aura donc

$$\frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{dx}{dw_i};$$

mais, comme

$$n_3 = (c - 1 - m)(n_1 - n_2), \qquad n_4 = (g - 1 - m)(n_1 - n_2),$$

$\frac{dx}{dt}$ dépend de c et de g. Quelle est l'erreur commise si nous sub-

stituons x_k, c_{k-1} et g_{k-1} à la place de x, c et g? Si nous remplaçons x par x_k, nous commettons une erreur du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre; si nous remplaçons ensuite c par c_{k-1}, nous commettons une nouvelle erreur

$$(n_1 - n_2)(c - c_{k-1})\frac{dx_k}{dw_3}.$$

Or $c - c_{k-1}$ est du $k^{\text{ième}}$ ordre; je dis que $\frac{dx_k}{dw_3}$ est du premier ordre, car $x_k - x_0$ est du premier ordre, et $\frac{dx_0}{dw_3}$ est nul puisque x_0 ne dépend que de $w_1 - w_2$. L'erreur est donc du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre; et il en est de même quand on remplace g par g_{k-1}.

C. Q. F. D.

Soit donc

$$(9) \qquad A, \quad A^*, \quad B, \quad B^*, \quad C, \quad C^*$$

ce que deviennent les différences

$$-\frac{dx}{dt} + \frac{dF'}{dX}, \quad -\frac{dX}{dt} - \frac{dF'}{dx}, \quad -\frac{dy}{dt} + \frac{dF'}{dY}, \quad \ldots,$$

quand on y fait cette substitution.

Les expressions (9) seront des fonctions *connues* qui seront du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Posons alors

$$x = x_k + \delta x, \qquad X = X_k + \delta X, \qquad c = c_{k-1} + \delta c, \qquad \ldots,$$

et proposons-nous de pousser l'approximation jusqu'au $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre pour x, jusqu'au $k^{\text{ième}}$ ordre pour c. Nous pourrons négliger les carrés de δx, δc, ..., et nos équations prendront la forme

$$(10) \qquad \delta\frac{dx}{dt} - \delta\frac{dF'}{dX} = A, \qquad \delta\frac{dX}{dt} + \delta\frac{dF'}{dx} = A^*, \qquad \ldots.$$

Les seconds membres sont des fonctions connues; quant aux premiers membres, ce sont des expressions linéaires par rapport aux inconnues et à leurs dérivées. On a par exemple

$$\delta\frac{dF'}{dx} = \frac{d^2F'}{dx^2}\delta x + \frac{d^2F'}{dx\,dX}\delta X + \ldots,$$

où, dans les dérivées secondes de F′, les inconnues doivent être

remplacées par leurs valeurs approchées $x = x_0$, $X = X_0$, ... (en même temps que les E et α par zéro), ainsi qu'on l'a expliqué au n° 341. D'autre part,

$$\delta \frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{d\,\delta x}{dw_i} + \sum \delta n_i \frac{dx}{dw_i}.$$

Dans le premier terme $\sum n_i \frac{d\,\delta x}{dw_i}$, nous pouvons remplacer n_3 et n_4 par leurs valeurs approchées

$$(c_0 - 1 - m)(n_1 - n_2), \quad (g_0 - 1 - m)(n_1 - n_2),$$

déduites de l'analyse des Chapitres XXVII et XXVI. L'erreur commise ainsi sur n_i est du premier ordre (et même du second), et, comme δx est du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre, l'erreur sur $n_i \frac{d\,\delta x}{dw_i}$ sera du $(k+2)^{\text{ième}}$ ordre au moins.

Dans le second terme $\sum \delta n_i \frac{dx}{dw_i}$, où figurent

$$\delta n_3 = (n_1 - n_2)\,\delta c, \qquad \delta n_4 = (n_1 - n_2)\,\delta g,$$

nous pouvons remplacer x par x_1; l'erreur ainsi commise sera du second ordre, et, comme δn_i est du $k^{\text{ième}}$ ordre, l'erreur sur le produit sera du $(k+2)^{\text{ième}}$ ordre.

Si nous faisons passer le terme $\sum \delta n_i \frac{dx_1}{dw_i}$ dans le second membre, les équations (10) deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} \sum n_i \frac{d\,\delta x}{dw_i} - \delta \frac{dF'}{dX} = A - \sum \delta n_i \frac{dx_1}{dw_i}, \\ \sum n_i \frac{d\delta X}{dw_i} + \delta \frac{dF'}{dx} = A^* - \sum \delta n_i \frac{dX_1}{dw_i}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les premiers membres restent les mêmes à toutes les approximations.

Dans le calcul des termes du premier degré, et en supposant $\alpha = E_3 = 0$ (et aussi $\delta c = \delta g = 0$ et par conséquent $\delta n_i = 0$, puisque à cette approximation c et g se réduisent à c_0 et g_0), les seconds membres sont nuls; les équations (11) doivent alors se réduire à celles que nous avons intégrées aux Chapitres XXVI et XXVII, Chapitres dans lesquels nous avons précisément déter-

miné ces termes du premier degré; c'est dire que les premiers membres des équations (11) se réduisent à

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial t} - \delta X - n_2\,\delta y, \\ \dfrac{\partial\,\delta X}{\partial t} + (m_1 + m_7)\,\delta\dfrac{x}{r^3} - 2n_2^2\,\delta x - n_2\,\delta Y, \\ \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial t} - \delta Y + n_2\,\delta x; \\ \dfrac{\partial\,\delta Y}{\partial t} + (m_1 + m_7)\,\delta\dfrac{y}{r^3} + n_2^2\,\delta y + n_2\,\delta X, \\ \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial t} - \delta Z, \\ \dfrac{\partial\,\delta Z}{\partial t} + (n_1 - n_2)\Theta\,\delta z \end{cases}$$

[*cf.* équ. (1), Chap. XXV, n° 323; équ. (1), Chap. XXVI, n° 331; équ. (6), Chap. XXVII, n° 342].

Observons d'ailleurs qu'on aurait

$$\varkappa\,\delta\frac{x}{r^3} = A\,\delta x + B\,\delta y,$$

$$\varkappa\,\delta\frac{y}{r_3} = B\,\delta x + C\,\delta y,$$

A, B, C ayant même signification que dans les équations (6) du Chapitre XXVII; nous écrivons aussi pour abréger

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum n_i \frac{d}{dw_i},$$

les n_i étant remplacés par leurs valeurs approchées

$$n_1, \quad n_2, \quad (c_0 - 1 - m)(n_1 - n_2), \quad (g_0 - 1 - m)(n_1 - n_2).$$

353. Si nous supposons pour un instant que les constantes δc et δg (et par conséquent les δn_i) sont données, les seconds membres sont connus; les premiers membres sont les expressions (12) et nous savons intégrer les équations sans second membre; le problème peut donc être considéré comme résolu par l'application du procédé classique du n° 350. Nous devons toutefois faire les remarques suivantes :

1° Les seconds membres se présentent sous la forme de fonctions

périodiques connues des quatre arguments w_i; mais dans les premiers membres figurent non pas les dérivées

$$\frac{d}{dt} = \sum n_i \frac{d}{dw_i},$$

mais les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum n_i^0 \frac{d}{dw_i},$$

où les n_i^0 sont les valeurs approchées

$$n_1^0 = n_1, \qquad n_2^0 = n_2,$$
$$n_3^0 = (c_0 - 1 - m)(n_1 - n_2), \qquad n_4^0 = (g_0 - 1 - m)(n_1 - n_2).$$

Cela ne change rien d'ailleurs au principe du calcul; seulement il faut, avant l'intégration, remplacer dans les seconds membres les w_i non pas par $n_i t + \varpi_i$, mais bien par $n_i^0 t + \varpi_i$.

Supposons donc qu'on ait formé les fonctions que nous avons appelées λ'_i au n° 350,

$$\lambda'_i = \alpha_i A + \ldots;$$

ce sont des fonctions périodiques données des w; on doit écrire alors non pas

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \sum n_k \frac{d\lambda_i}{dw_k} = \alpha_i A + \ldots,$$

mais bien

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial t} = \sum n_k^0 \frac{d\lambda_i}{dw_k} = \alpha_i A + \ldots.$$

Si donc

$$\alpha_i A + \ldots = \sum h e^{\sqrt{-1}\,\Sigma k_\alpha w_\alpha}, \tag{13}$$

les k_α étant entiers, on en déduira non pas

$$\lambda_i = \sum \frac{h e^{\sqrt{-1}\,\Sigma k_\alpha w_\alpha}}{\sqrt{-1}\sum k_\alpha n_\alpha},$$

mais bien

$$\lambda_i = \sum \frac{h e^{\sqrt{-1}\,\Sigma k_\alpha w_\alpha}}{\sqrt{-1}\sum k_\alpha n_\alpha^0}.$$

Cette analyse suppose que le second membre de (13) ne contient pas

de terme constant. On verra plus loin, au n° 356, comment on peut s'arranger pour qu'il en soit ainsi.

354. On remarquera que les quatre premières équations (11) forment un système qui ne dépend que de δx, δy, δX, δY, tandis que les deux dernières forment un système qui ne dépend que de δz, δZ. Ces deux systèmes peuvent donc être traités séparément.

Nous remarquerons ensuite que nous nous trouvons dans le cas où le procédé du n° 351 est applicable, puisque nos équations sans second membre sont les équations aux variations d'équations canoniques.

Considérons donc les quatre solutions particulières (7), (12) et (12 *bis*) du Chapitre XXVII; soient

$$\delta x = \xi_1, \qquad \delta y = \eta_1; \qquad \delta x = \xi_2, \qquad \delta y = \eta_2$$

les deux solutions (7), ou ces deux mêmes solutions multipliées par un coefficient que nous pouvons choisir arbitrairement;

$$\delta x = \xi_3, \qquad \delta y = \eta_3; \qquad \delta x = \xi_4, \qquad \delta y = \eta_4$$

les deux solutions (12) et (12 *bis*), ou ces mêmes solutions multipliées par un coefficient que nous pouvons choisir arbitrairement. Soient

$$\delta X = \xi_i^*, \qquad \delta Y = \eta_i^*$$

les valeurs de δX et δY qui correspondent à $\delta x = \xi_i$, $\delta y = \eta_i$; on aura la relation bilinéaire

$$(\xi_i \xi_k^* - \xi_i^* \xi_k) + (\eta_i \eta_k^* - \eta_i^* \eta_k) = \text{const.},$$

qui n'est autre chose que la relation (14) du Chapitre précédent.

Nous savons que la constante du second membre est nulle, sauf dans le cas où $i=1$, $k=2$ et dans celui où $i=3$, $k=4$. Nous pourrons choisir les coefficients arbitraires dont nous venons de parler [et par lesquels les solutions (7), (12) et (12 *bis*) sont multipliées] de telle façon que dans ces deux cas la constante du second membre soit égale à 1. C'est ce qui est le plus commode pour l'exposition; mais dans le calcul on pourra faire un autre choix; par exemple on pourra avoir avantage pour $i=3$, $k=4$ à supposer la constante égale à $\sqrt{-1}$.

Soient alors

$$\mathrm{L},\quad \mathrm{L}^*,\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{M}^*,\quad \mathrm{N},\quad \mathrm{N}^*$$

les seconds membres des six équations (11), de telle façon que

$$\mathrm{L} = \mathrm{A} - \sum \delta n_i \frac{dx_1}{dw_i}.$$

Appliquons le procédé du n° 351 ; il viendra

$$\delta x = \sum \lambda_i \xi_i, \qquad \delta \mathrm{X} = \sum \lambda_i \xi_i^*,$$

avec les conditions

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} &= \xi_2^* \mathrm{L} - \xi_2 \mathrm{L}^* + \eta_2^* \mathrm{M} - \eta_2 \mathrm{M}^*,\\
\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} &= -\xi_1^* \mathrm{L} + \xi_1 \mathrm{L}^* - \eta_1^* \mathrm{M} + \eta_1 \mathrm{M}^*,\\
\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} &= \xi_4^* \mathrm{L} - \xi_4 \mathrm{L}^* + \eta_4^* \mathrm{M} - \eta_4 \mathrm{M}^*,\\
\frac{\partial \lambda_4}{\partial t} &= -\xi_3^* \mathrm{L} + \xi_3 \mathrm{L}^* - \eta_3^* \mathrm{M} + \eta_3 \mathrm{M}^*.
\end{aligned}\right.$$

353. Le même procédé s'applique au second système formé des deux dernières équations (11). Soient

$$z = \zeta_5, \qquad z = \zeta_6$$

les deux solutions (2) de l'équation (1) du Chapitre XXVI, multipliées au besoin par un facteur constant arbitrairement choisi. Nos équations sans second membre [formées avec δz comme cette équation (1) avec z] admettront les deux solutions

$$\delta z = \zeta_5, \qquad \delta \mathrm{Z} = \zeta_5^*,$$
$$\delta z = \zeta_6, \qquad \delta \mathrm{Z} = \zeta_6^*,$$

entre lesquelles nous aurons la relation bilinéaire

$$\zeta_5 \zeta_6^* - \zeta_5^* \zeta_6 = \text{const.}$$

Il ne faut naturellement pas confondre les ζ_i avec $\zeta = e^{i\tau}$.

Nous pouvons supposer que la constante du second membre est égale à 1. Nous aurons alors

$$\delta z = \sum \lambda_i \zeta_i$$

avec

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_5}{\partial t} = \quad \zeta_6^\star N - \zeta_6 N^\star, \\ \dfrac{\partial\lambda_6}{\partial t} = -\zeta_5^\star N + \zeta_5 N^\star. \end{cases}$$

356. Il faut, comme nous l'avons vu à la fin du n° 353, que les seconds membres des équations (14) et (15), qui sont des fonctions périodiques des w, ne contiennent pas de terme constant. Examinons-les successivement et considérons d'abord $\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}$. Je dis que cette expression est une fonction impaire des w et ne contient pas de terme constant. Il est aisé, en effet, de constater que

$$\xi_1^\star, \quad \eta_1, \quad L^\star, \quad M$$

sont des fonctions paires, tandis que

$$\xi_1, \quad \eta_1^\star, \quad L, \quad M^\star$$

sont des fonctions impaires, ce qui démontre la proposition énoncée; il ne peut donc pas s'introduire dans λ_2 de terme séculaire.

Passons à λ_1; nous savons que ξ_1 est égal, à un facteur constant près, à $\frac{dx_0}{d\tau}$, et que ξ_2 est égal, à un facteur constant près, à

$$-\frac{\tau}{m}\frac{dx_0}{d\tau} + \frac{dx_0}{dm};$$

nous pouvons donc choisir les facteurs constants de telle sorte que l'on ait

$$\xi_2 = t\xi_1 + (\xi_2), \qquad \xi_2^\star = t\xi_1^\star + (\xi_2^\star),$$
$$\eta_2 = t\eta_1 + (\eta_2), \qquad \eta_2^\star = t\eta_1^\star + (\eta_2^\star).$$

ξ_1, η_1, $\xi_1^\star$, $\eta_1^\star$, (ξ_2), (η_2), $(\xi_2^\star)$, $(\eta_2^\star)$ étant des fonctions périodiques de τ. Posons alors

$$\lambda_1 = -t\lambda_2 + \mu_1;$$

il viendra

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} = -t\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \lambda_2 + \frac{\partial\mu_1}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \lambda_2 + (\xi_2^\star)L - (\xi_2)L^\star + (\eta_2^\star)M - (\eta_2)M^\star.$$

Le second membre est encore une fonction périodique des w, paire cette fois; mais dans ce second membre figure λ_2 qui n'a été déterminé que par une intégration, c'est-à-dire à une constante près. Nous pouvons disposer de cette constante de telle façon que le terme constant du second membre disparaisse. Dans ces conditions μ_1 ne contiendra pas de terme séculaire.

D'ailleurs les deux premiers termes de δx

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2$$

se réduisent à

$$\mu_1 \xi_1 + \lambda_2 (\xi_2),$$

de sorte qu'on a

$$\delta x = \mu_1 \xi_1 + \lambda_2 (\xi_2) + \lambda_3 \xi_3 + \lambda_4 \xi_4.$$

357. Examinons maintenant $\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$ et $\frac{\partial \lambda_4}{\partial t}$. Je dis que nous pouvons choisir δc de façon à faire disparaître *à la fois* le terme constant dans ces deux expressions. Nous avons

$$L = A - \sum \delta n_i \frac{dx_1}{dw_i}.$$

Comme δn_1 et δn_2 sont nuls et que $\frac{dx_1}{dw_4} = 0$, puisque x_1 ne dépend que de $\tau = w_1 - w_2$ et de w_3, le dernier terme du second membre se réduit à

$$- \delta n_3 \frac{dx_1}{dw_3} = - \delta c (n_1 - n_2) \frac{dx_1}{dw_3}.$$

D'ailleurs on a

$$x_1 = E_1 (\xi_3 + \xi_4).$$

Nous voyons donc que

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = \xi_4^* L - \xi_4 L^* + \eta_4^* M - \eta_4 M^*$$

peut se diviser en deux parties et qu'on peut écrire

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = \varphi_3 - \psi_3 \, \delta c (n_1 - n_2),$$

où φ_3 est ce que devient l'expression de $\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$ quand on y remplace

$$L, \quad L^*, \quad M, \quad M^*$$

par

$$A, \quad A^*, \quad B, \quad B^*.$$

et ψ_3 ce que devient cette expression quand on y remplace ces quantités par

$$\frac{dx_1}{dw_3}, \quad \frac{dX_1}{dw_3}, \quad \frac{dy_1}{dw_3}, \quad \frac{dY_1}{dw_3}.$$

On aura de même

$$\frac{\partial\lambda_4}{\partial t} = \varphi_4 - \psi_4\,\delta c(n_1 - n_2),$$

φ_4 et ψ_4 étant formés avec $\frac{\partial\lambda_4}{\partial t}$ comme φ_3 et ψ_3 avec $\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}$. Je vais disposer de δc de façon à annuler le terme constant de $\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}$; je dis que la valeur de δc qui annule ce terme est réelle et qu'elle annule en même temps le terme constant de $\frac{\partial\lambda_4}{\partial t}$.

Nous avons supposé

$$\xi_3 + i\eta_3 = h\sum b_k\zeta^{c+2k+1},$$

$$\xi_3 - i\eta_3 = h\sum c_k\zeta^{c+2k+1},$$

$$\xi_4 - i\eta_4 = h\sum b_k\zeta^{-c-2k-1},$$

$$\xi_4 + i\eta_4 = h\sum c_k\zeta^{-c-2k-1};$$

les coefficients b_k et c_k sont réels, et h est un coefficient constant dont nous avons disposé de façon à réduire une certaine constante à 1.

En effet, quand je change les w en $-w$, x qui est une fonction paire des w ne change pas; au contraire, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{dw}$, X, y, ... changent de signe.

$$A, \quad \frac{dx_1}{dw_3}, \quad B^*, \quad \frac{dY_1}{dw_3}$$

changent de signe;

$$A^*, \quad \frac{dX_1}{dw_3}, \quad B, \quad \frac{dy_1}{dw_3}$$

ne changent pas.

$\frac{\xi_3}{h}$ et $\frac{\eta_3^*}{h}$ se changent en $\frac{\xi_4}{h}$ et $\frac{\eta_4^*}{h}$, tandis que $\frac{\eta_3}{h}$ et $\frac{\xi_3^*}{h}$ se changent en $-\frac{\eta_4}{h}$ et $-\frac{\xi_4^*}{h}$. Donc $\frac{\varphi_3}{h}$ se change en $-\frac{\varphi_4}{h}$, $\frac{\psi_3}{h}$ en $-\frac{\psi_4}{h}$, $\frac{\varphi_4}{h}$ en $-\frac{\varphi_3}{h}$, $\frac{\psi_4}{h}$ en $-\frac{\psi_3}{h}$. Donc le terme constant de $\frac{\varphi_3}{h}$, par exemple, est égal à celui de $-\frac{\varphi_4}{h}$.

Si maintenant nous changeons i en $-i$, $\frac{\xi_3}{h}$, $\frac{\eta_3}{h}$, $\frac{\xi_3^*}{h}$, $\frac{\eta_3^*}{h}$ se permutent avec $\frac{\xi_4}{h}$, $\frac{\eta_4}{h}$, $\frac{\xi_4^*}{h}$, $\frac{\eta_4^*}{h}$; les quantités A, A^*, $\frac{dx_1}{dx'_3}$, ..., qui sont réelles, ne changent pas.

Donc $\frac{\varphi_3}{h}$, $\frac{\psi_3}{h}$, $\frac{\varphi_4}{h}$, $\frac{\psi_4}{h}$ se changent encore en $-\frac{\varphi_4}{h}$, $-\frac{\psi_4}{h}$, $-\frac{\varphi_3}{h}$, $-\frac{\psi_3}{h}$. Donc le terme constant de $\frac{\varphi_3}{h}$ est imaginaire conjugué de celui de $-\frac{\varphi_4}{h}$.

Si le terme constant de $\frac{\varphi_3}{h}$ est d'une part égal à celui de $-\frac{\varphi_4}{h}$, d'autre part imaginaire conjugué de celui de $-\frac{\varphi_4}{h}$, c'est que ces deux termes sont égaux et réels. Et il en est de même en ce qui concerne ψ_3 et ψ_4.

Soient donc

$$\alpha, \quad \beta, \quad -\alpha, \quad -\beta$$

les termes constants de

$$\frac{\varphi_3}{h}, \quad \frac{\psi_3}{h}, \quad \frac{\varphi_4}{h}, \quad \frac{\psi_4}{h};$$

ils seront réels, et il suffira de prendre

$$\delta c = \frac{\alpha}{\beta(n_1 - n_2)}$$

pour annuler à la fois le terme constant de $\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$ et celui de $\frac{\partial \lambda_4}{\partial t}$. Nous n'aurons donc de terme séculaire ni dans λ_3 ni dans λ_4.

C. Q. F. D.

On démontrerait de la même manière qu'on peut choisir δg de façon qu'il n'y ait de terme séculaire ni dans λ_5 ni dans λ_6. En

effet, le second membre de la cinquième équation (11) s'écrit

$$N = C - \sum \delta n_i \frac{dz_1}{dw_i};$$

on a ici

$$\sum \delta n_i \frac{dz_1}{dw_i} = \delta n_4 \frac{dz_1}{dw_4} = \delta g (n_1 - n_2) \frac{dz_1}{dw_4}.$$

Le reste du raisonnement s'achève comme pour λ_3 et λ_4, δg jouant le rôle de δc, N et N* celui de L et L*, ζ_5 et ζ_6 celui de ξ_3 et ξ_4, etc.

358. L'intégration, comme nous l'avons vu à la fin du n° 353, introduit le petit diviseur

$$\sum k_\alpha n_\alpha^0,$$

où les k_α sont des entiers; comme

$$n_3^0 = c_0(n_1 - n_2)$$

et

$$n_4^0 = g_0(n_1 - n_2)$$

sont développables suivant les puissances de m^2, ce petit diviseur sera lui-même développable suivant les puissances de m^2.

Les premiers termes du développement sont

$$n_2 = n_2^0 = m(n_1 - n_2), \qquad n_1 = n_1^0 = (1 + m)(n_1 - n_2),$$

$$n_3^0 = (n_1 - n_2)\left(\frac{3}{4}m^2 + \ldots\right),$$

$$n_4^0 = (n_1 - n_2)\left(-\frac{3}{4}m^2 + \ldots\right),$$

puisque

$$c = 1 + m + \frac{3}{4}m^2 + \ldots, \qquad g = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{1}{n_1 - n_2}\sum k_\alpha n_\alpha^0 = k_1 + (k_1 + k_2)m + \frac{3}{4}(k_3 - k_4)m^2 + \ldots.$$

Il sera donc divisible par m si $k_1 = 0$; il sera divisible par m^2 si $k_1 = k_2 = 0$, c'est-à-dire si le terme correspondant ne dépend que des longitudes du périgée et du nœud; dans ces deux cas il sera ce

que j'appellerai un *petit diviseur analytique*. Enfin il sera divisible par m^3 si $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4$, c'est-à-dire s'il dépend seulement de la *somme* des longitudes du périgée et du nœud. Ce sera alors un *très petit diviseur analytique*.

Mais il arrive ici que les termes en m^3 ont de très grands coefficients, de sorte que $c_0 - 1 - m$, au lieu d'être à peu près égal en valeur absolue à $\frac{3}{4} m^2$, et par conséquent à $g_0 - 1 - m$, est à peu près deux fois plus grand. Il en résulte que les très petits diviseurs analytiques, quoique divisibles par m^3, sont *numériquement* de l'ordre de m^2. Si, au contraire, on a $k_1 = k_2 = 0$, $2k_3 = k_4$, le diviseur, quoique non divisible par m^3, sera numériquement de l'ordre de m^3. Ce sera un *très petit diviseur numérique* (inégalité de Laplace, *cf.* Tisserand, t. III, p. 158).

Dans le calcul numérique des coefficients, ce sont les très petits diviseurs numériques qui importent. Au contraire, si l'on se propose, comme le faisait Delaunay, de développer ces coefficients suivant les puissances de m, il faut s'inquiéter des très petits diviseurs analytiques.

Les très petits diviseurs analytiques se présentent pour la première fois dans les termes en $E_1 E_2^2 E_3^4$ ou en $E_1^2 E_2 E_3^4$, et les très petits diviseurs numériques dans les termes en $E_2^2 E_3^3 \alpha$, $E_1 E_2^4 E_3^6$, $E_1 E_2 E_3^3 \alpha$ ou $E_1^2 E_2^3 E_3^6$.

359. Tel est le principe de la méthode de Brown.

Je n'insisterai pas sur les perfectionnements de détail qu'il y a apportés et dont les principaux sont les suivants :

1° Au lieu de quatre équations linéaires du premier ordre à second membre, il emploie deux équations linéaires du deuxième ordre à second membre (obtenues par l'élimination de X et Y); il en résulte que les expressions des $\frac{d\lambda_i}{dt}$ sont un peu modifiées et se présentent sous la forme d'une somme de deux termes seulement et non de quatre.

2° Au lieu de δx et δy, il prend comme inconnues les quantités imaginaires

$$\delta u = \delta x + i\,\delta y, \qquad \delta s = \delta x - i\,\delta y.$$

3° Au lieu d'employer des lignes trigonométriques des multiples

des w, il simplifie les notations en introduisant la variable

$$\zeta = e^{i\tau}.$$

4° Pour les approximations d'ordre élevé, il a recours à l'artifice par lequel Hill était passé des équations (2) aux équations (5) du Chapitre XXV. Les calculs de substitution s'en trouvent un peu simplifiés.

Je me bornerai à dire que la méthode est applicable aussi bien au calcul des termes du premier ordre en α et E_3 qu'à celui des termes d'ordre supérieur.

Pour plus de détails, je renverrai à son Ouvrage original (*Memoirs of the Royal Astronomical Society*, t. LIII, LIV et LVII).

On pourrait se demander si, à cause des petits diviseurs divisibles par m^2 ou m^3, on n'arrivera pas dans la suite des calculs à des termes contenant en facteur une puissance *négative* de m. On peut démontrer que cela ne peut arriver que quand interviendront les *très petits diviseurs analytiques*. Il en résulte, d'après le numéro précédent, que cela ne peut arriver que pour des termes d'ordre très élevé; cela ne peut arriver si l'on suppose $E_2 = 0$, ou bien $E_3 = 0$, puisque dans ce cas il ne peut y avoir de très petits diviseurs analytiques, mais tout au plus de petits diviseurs analytiques divisibles seulement par m^2. Pour la démonstration, je renverrai au *Bulletin astronomique*, t. XXV, p. 321.

CHAPITRE XXIX.

SECONDE MÉTHODE.

360. La seconde méthode que nous allons exposer présente surtout des avantages quand on veut obtenir non seulement la valeur numérique des coefficients, mais leur développement analytique en fontion de m, comme le faisait Delaunay.

Nous aurons avantage à employer, au lieu des arguments w_i, les suivants :

$$\tau = w_1 - w_2, \qquad \tau_1 = w_1 + w_3, \qquad \tau_2 = w_1 + w_4, \qquad \tau_3 = w_2.$$

De cette façon, dans le coefficient d'un terme dépendant du sinus ou du cosinus de

$$p\tau + p_1\tau_1 + p_2\tau_2 + p_3\tau_3,$$

l'exposant de E_i sera au moins égal à $|p_i|$.

Nous partirons de la formule (25) du n° 320 :

$$\sum x\,dX - d\Omega'' = \sum A'_i\,dw_i - \frac{\Phi'_1\,dw_2}{n_2}.$$

Cette formule peut recevoir utilement diverses modifications : d'abord nous pouvons passer des variables w aux variables τ; nous pouvons ensuite remarquer que Φ'_1 se réduit à une constante (intégrale de Jacobi) lorsque $E_3 = 0$. Cela nous permet d'écrire

$$\frac{\Phi'_1}{n_2} = K + E_3\Phi,$$

K étant une constante et $E_3\Phi$ étant divisible par E_3. On a en effet

$$\frac{\Phi'_1}{n_2} = \psi + E_3\theta,$$

ψ et θ étant des fonctions de x, y, z, X, Y, Z, de $\tau_3 = w_3$ et

des constantes E_3 et α. D'ailleurs ψ est indépendant de E_3 et τ_3. Soit ensuite x^* ce que devient le développement de x quand on y fait $E_3 = 0$.

Soit ψ^* ce que devient ψ quand on y remplace $x, \ldots$ par $x^*, \ldots$; alors ψ^* sera une constante, $\psi - \psi^*$ sera divisible par E_3, et nous pourrons poser

$$\psi^* = K, \qquad \psi - \psi^* + E_3\theta = E_3\Phi.$$

On a donc

$$\sum A'_i\, dw_i - \frac{\Phi'_1\, dw_2}{n_2} = B\, d\tau + B_1\, d\tau_1 + B_2\, d\tau_2 + B_3\, d\tau_3 - E_3\Phi\, d\tau_3,$$

d'où

$$\sum x\, dX - d\Omega'' = \sum B\, d\tau - E_3\Phi\, d\tau_3.$$

Les B sont des constantes, de même que les A'_i et K; je veux dire par là qu'ils dépendent seulement de

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \alpha, \quad m$$

et sont indépendants des τ.

Posons

$$S = \Omega'' - x_0 X - y_0 Y - z_1 Z,$$

x_0 et y_0 étant les termes de degré zéro calculés au Chapitre XXV; z_1 représente l'ensemble des termes déterminés au Chapitre XXVI (comme z ne contient pas de terme de degré zéro, on aura $z_0 = 0$); il viendra

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} dS &= \sum (x - x_0)\, dX - \sum X\, dx_0 \\ &\quad + (z - z_1)\, dZ - Z\, dz_1 - \sum B\, d\tau + E_3\Phi\, d\tau_3. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule (1), on doit regarder E_1, E_2, m et les τ comme des variables; au contraire, E_3 et α sont des constantes données, de sorte qu'on aura

$$dE_3 = d\alpha = 0.$$

J'ajoute que dans cette formule $\sum (x - x_0)\, dX$ et $\sum X\, dx_0$ re-

présentent simplement

$$(x - x_0)\,dX + (y - y_0)\,dY, \quad X\,dx_0 + Y\,dy_0.$$

361. Cela posé, supposons qu'on ait déterminé les termes d'ordre k et d'ordre inférieur de x et de y, de X et Y, de S et B, les termes d'ordre $k-1$ de z et Z, et qu'on ait par conséquent

$$(2) \qquad x = x_k, \quad y = y_k, \quad z = z_{k-1}, \quad S = S_k, \quad \ldots.$$

Je pose

$$(3) \qquad x = x_k + \delta x, \quad y = y_k + \delta y, \quad \ldots,$$

et je me propose de calculer δx, δy, δS jusqu'aux termes du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, δz jusqu'aux termes du $k^{\text{ième}}$ ordre.

Substituons d'abord dans (1) à la place de toutes nos variables leurs valeurs approchées (2), la différence des deux membres sera du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre; nous pourrons la mettre sous la forme

$$\sum u\,dv,$$

u et v étant des fonctions connues.

Substituons maintenant à la place de ces variables leurs valeurs approchées (3) en négligeant les puissances supérieures de $\delta x, \ldots$, ce qui est permis puisque nous négligeons les termes d'ordre $k+2$; il viendra

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} d\,\delta S = {} & \sum \delta x\,dX + \sum (x - x_0)\,d\,\delta X - \sum \delta X\,dx_0 + \delta z\,dZ \\ & + (z - z_1)\,d\,\delta Z - \delta Z\,dz_1 - \sum \delta B\,d\tau + E_3\,\delta\Phi\,d\tau_3 + \sum u\,dv. \end{aligned} \right.$$

Le second membre est susceptible des simplifications suivantes : considérons-en d'abord la première ligne; comme δx et δX sont d'ordre $k+1$, nous pouvons remplacer x et X par x_0 et X_0. De même dans la deuxième ligne, comme δz et δZ sont d'ordre k, nous pouvons négliger dans leur coefficient z_2 qui est de deuxième ordre et remplacer z et Z par z_1 et Z_1.

Enfin $\delta\Phi$ est d'ordre $k+1$, car

$$\delta\Phi = \sum \frac{d\Phi}{dx}\,\delta x + \sum \frac{d\Phi}{dX}\,\delta X + \frac{d\Phi}{dz}\,\delta z + \frac{d\Phi}{dZ}\,\delta Z.$$

Or δx et δX sont d'ordre $k+1$, δz et δZ sont d'ordre k, mais $\frac{d\Phi}{dz}$ et $\frac{d\Phi}{dZ}$ sont divisibles par E_2 et par conséquent du premier ordre. Comme d'ailleurs E_3 est du premier ordre, nous pourrons négliger $E_3\,\delta\Phi$ et il restera

$$(5)\quad \begin{cases} d\,\delta S = \sum \delta x\, dX_0 - \sum \delta X\, dx_0 \\ \qquad + \delta z\, dZ_1 - \delta Z\, dz_1 - \sum \delta B\, d\tau + \sum u\, dv. \end{cases}$$

362. Prenons maintenant la formule (26) du n° 320,

$$\frac{d\Omega''}{dt} = \Phi'_1 + \sum x \frac{dX}{dt} - H,$$

où $\Phi'_1 = F' - n_2 v'$ et où H est une constante choisie de telle façon que Ω'' soit périodique. Nous déduirons

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Phi'_1 + \sum (x - x_0) \frac{dX}{dt} \\ \qquad + (z - z_1)\frac{dZ}{dt} - \sum X \frac{dx_0}{dt} - Z \frac{dz_1}{dt} - H. \end{cases}$$

Substituons dans (6) les valeurs approchées (2) à la place des variables et soit G la différence des deux membres; G sera une fonction connue du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre. Substituons maintenant les valeurs approchées (3) et négligeons tout ce qui est du $(k+2)^{\text{ième}}$ ordre; il viendra

$$\delta \frac{dS}{dt} = \delta\Phi'_1 + \sum \delta x \frac{dX}{dt} + \sum (x - x_0)\,\delta \frac{dX}{dt} - \sum \delta X \frac{dx_0}{dt}$$
$$+ G + \delta z \frac{dZ}{dt} + (z - z_1)\,\delta \frac{dZ}{dt} - \delta Z \frac{dz_1}{dt} - \delta H.$$

D'autre part,

$$\delta\Phi'_1 = \sum \frac{d\Phi'_1}{dx}\delta x + \sum \frac{d\Phi'_1}{dX}\delta X + \frac{d\Phi'_1}{dz}\delta z + \frac{d\Phi'_1}{dZ}\delta Z.$$

Mais, en vertu des équations du mouvement, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF'}{dX} = \frac{d\Phi'_1}{dX}, \ \ldots,$$

d'où

$$\delta\Phi'_1 = -\sum \frac{dX}{dt}\delta x + \sum \frac{dx}{dt}\delta X - \frac{dZ}{dt}\delta z + \frac{dz}{dt}\delta Z,$$

et par conséquent

$$\delta \frac{dS}{dt} = G - \delta H + \sum (x - x_0)\, \delta \frac{dX}{dt} + \sum \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) \delta X$$
$$+ \quad (z - z_1)\, \delta \frac{dZ}{dt} + \quad \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right) \delta Z.$$

Dans la première ligne on peut remplacer x par x_0 et, dans la seconde, z par z_1, pour les mêmes raisons qu'au numéro précédent, ce qui nous permet d'écrire

$$(7) \qquad \delta \frac{dS}{dt} = G - \delta H.$$

Qu'est-ce maintenant que $\delta \frac{dS}{dt}$? On a

$$\frac{dS}{dt} = \sum n_i \frac{dS}{dw_i},$$

d'où

$$\delta \frac{dS}{dt} = \sum n_i \frac{d\,\delta S}{dw_i} + \sum \delta n_i \frac{dS}{dw_i}.$$

Dans le premier terme du second membre nous pouvons remplacer n_i par n_i^0, de sorte qu'il se réduira (en reprenant les notations du Chapitre précédent) à

$$\sum n_i^0 \frac{d\,\delta S}{dw_i} = \frac{\partial\, \delta S}{\partial t}.$$

Dans le second terme figurent deux constantes indéterminées,

$$\delta n_3 = \delta c(n_1 - n_2), \qquad \delta n_4 = \delta g(n_1 - n_2);$$

la première est d'ordre k, car nous supposerons que c a été déterminé jusqu'aux termes d'ordre $k - 1$ inclusivement; la seconde sera d'ordre $k - 1$, car nous supposerons que g a été déterminé jusqu'aux termes d'ordre $k - 2$. Posons

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots,$$

$S_0, S_1, S_2, \ldots$ représentant respectivement les termes d'ordre 0, 1, 2, ... Nous pourrons alors, dans le coefficient de δn_3, remplacer S par $S_0 + S_1$ ou par S_1, puisque S_0 ne dépend pas de w_3, et, dans le coefficient de δn_4, remplacer S par $S_0 + S_1 + S_2$ où

par S_2, puisque S_0 et S_1 ne dépendent pas de w_4. Il vient donc

$$\frac{\partial\,\delta S}{\partial t} = G - \delta H - \delta n_3 \frac{dS_1}{dw_3} - \delta n_4 \frac{dS_2}{dw_4}. \tag{8}$$

363. Reportons-nous aux notations du n° 318; nous avons trouvé dans ce numéro les formules suivantes :

$$\Phi_1 = H - \sum W n, \qquad W_i = A_i = A'_i \qquad (i = 1, 3, 4),$$
$$n_2 W_2 + \Phi_1 = n_2 A_2 + K = n_2 A'_2,$$
$$dH = \sum W\,dn, \qquad d\Phi_1 = -\sum n\,dW,$$

la lettre K ayant le même sens qu'au n° 318, et nous en tirerons (en nous rappelant que $dn_2 = 0$)

$$H = \sum n_i A'_i, \qquad dH = \sum A'_i\,dn_i, \qquad \sum n_i\,dA'_i = 0.$$

Mais il vaudra mieux revenir aux arguments τ que nous avons introduits au début de ce Chapitre ; soit donc

$$d\tau = \nu\,dt, \qquad d\tau_i = \nu_i\,d\tau,$$

de telle sorte que

$$\nu = n_1 - n_2, \qquad \nu_1 = n_1 + n_3 = \nu c, \qquad \nu_2 = n_1 + n_4 = \nu g, \qquad \nu_3 = n_2$$

Nous aurons

$$K\nu_3 + \sum B\nu = \sum A' n, \qquad K\,d\nu_3 + \sum B\,d\nu = \sum A'\,dn,$$

la lettre K ayant le même sens qu'au numéro précédent, et par conséquent

$$H = \sum B\nu + K\nu_3, \qquad dH = \sum B\,d\nu, \qquad \sum \nu\,dB + \nu_3\,dK = 0. \tag{9}$$

Toutes ces quantités H, B, ν ... dépendent des constantes m, E et α, et ne dépendent pas des arguments τ. Supposons que dans les équations (9) on substitue d'abord les premières valeurs approchées (2) de nos inconnues, et soient

$$P, \qquad \sum Q\,dq, \qquad dP - \sum Q\,dq \tag{10}$$

les différences des deux membres; P, Q, q seront des fonctions connues et les expressions (10) seront d'ailleurs du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Cela posé, substituons dans les équations (9) les valeurs plus approchées (3) et négligeons les termes d'ordre $k+2$; il viendra

$$(11)\quad \begin{cases} \delta H = \sum B\,\delta\nu + \sum \nu\,\delta B + P + \nu_3\,\delta K, \\ d\,\delta H = \sum B\,d\,\delta\nu + \sum \delta B\,d\nu + \sum Q\,dq. \end{cases}$$

Remarquons que δH, $d\,\delta H$ et δB sont d'ordre $k+1$; que $\delta\nu = \delta\nu_3 = 0$; que $\delta\nu_1$ est d'ordre k et $\delta\nu_2$ d'ordre $k-1$; que $d\,\delta\nu_i$ est du même ordre que $\delta\nu_i$; que B_1 est divisible par E_1^2 et B_2 par E_2^2 et sont par conséquent du second ordre, ce qui permet de négliger, par exemple, $B_1\,\delta\nu_1$; alors nous écrirons

$$(12)\quad \begin{cases} \delta H = B_2\,\delta\nu_2 + \sum \nu\,\delta B + P + \nu_3\,\delta K, \\ d\,\delta H = B_2\,d\,\delta\nu_2 + \sum \delta B\,d\nu + \sum Q\,dq. \end{cases}$$

364. Tous les termes de nos développements contiennent en facteur un certain monome

$$\mu = \alpha^{q_0} E_1^{q_1} E_2^{q_2} E_3^{q_3},$$

que Brown appelle leur *caractéristique;* la somme des exposants

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3$$

est le *degré* du terme. Dans les calculs précédents, nous pouvons supposer que δS, par exemple, ou δx, au lieu de représenter *tous* les termes de degré $k+1$, par exemple, représente seulement l'ensemble de tous les termes ayant une caractéristique donnée μ. Mais, comme le degré d'approximation n'est pas le même, par exemple, pour δz et δx, il est nécessaire que je précise. Je conviendrai donc que

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta X,\quad \delta Y,\quad \delta S,\quad \delta B,\quad \delta K,\quad \delta H$$

représentent l'ensemble des termes de caractéristique μ; que δz, δZ représentent l'ensemble des termes de caractéristique $\frac{\mu}{E_2}$; que

δc comprend les termes de caractéristique $\frac{\mu}{E_1}$ et δg ceux de caractéristique $\frac{\mu}{E_2^2}$.

En ce qui concerne les valeurs approchées (2), je supposerai que

$$x_k, \quad y_k, \quad S_k, \quad \ldots$$

comprennent tous les termes dont la caractéristique est un diviseur de μ (μ lui-même étant exclu) et que de même

$$z_{k-1}, \quad c_{k-1}, \quad g_{k-2}$$

comprennent les termes ayant respectivement pour caractéristique un diviseur de

$$\frac{\mu}{E_2}, \quad \frac{\mu}{E_1}, \quad \frac{\mu}{E_2^2}.$$

365. Cela posé, nous devons distinguer trois cas :

1° μ n'est pas divisible ni par E_1 ni par E_2.

Dans ce cas ni τ_1, ni τ_2 (ou ce qui revient au même ni ϖ_3 ni ϖ_4) ne figurent dans nos développements. La formule (8) se réduit donc à

$$\frac{\partial\,\delta S}{\partial t} = G - \delta H\,;$$

G est connu; on disposera de δH de telle façon que le terme constant du second membre soit nul, et l'on aura δS par une simple quadrature. La fonction δS est ainsi déterminée à une constante près, mais cette constante doit être nulle puisque δS doit être une fonction impaire.

Passons maintenant à la formule (5), et remarquons que $z, Z_1, \ldots$ sont nuls, et de plus que nous n'avons que trois variables par rapport auxquelles nous puissions différentier et qui sont m, τ et τ_3; il vient donc

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,\delta S}{dm} &= \sum \delta x \frac{dX_0}{dm} - \sum \delta X \frac{dx_0}{dm} + \sum u \frac{dv}{dm}, \\ \frac{d\,\delta S}{d\tau} &= \sum \delta x \frac{dX_0}{d\tau} - \sum \delta X \frac{dx_0}{d\tau} - \delta B + \sum u \frac{dv}{d\tau}, \end{aligned}\right.$$

et, puisque x_0 et X_0 ne dépendent pas de τ_2,

$$(14)\quad \frac{d\,\delta S}{d\tau_3} = -\,\delta B_3 + \sum u \frac{dv}{d\tau_3}.$$

De l'équation (14) on déduit

$$\delta B_3 = \sum \left[u \frac{dv}{d\tau_3} \right],$$

en désignant par $\left[u \frac{dv}{d\tau_3} \right]$ le terme constant de $u \frac{dv}{d\tau_3}$; et cela détermine δB_3.

On remarquera d'autre part que dans la seconde équation (12) on a $B_2 = 0$, puisque B_2 doit être divisible par E_2^2 et que, μ n'étant pas divisible par E_2, nous négligeons E_2; il reste donc

$$d\,\delta H = \sum \delta B\, d\nu + \sum Q\, dq,$$

ou, puisque $d\nu_3 = 0$, que $d\nu_1$ et $d\nu_2$ n'interviennent pas,

$$\frac{d\,\delta H}{dm} = \delta B \frac{d\nu}{dm} + \sum Q \frac{dq}{dm},$$

ce qui détermine δB, puisque δH, Q et q sont connus et que

$$\nu = \frac{n_2}{m}.$$

Nous avons enfin

$$\delta X = \delta \frac{dx}{dt} - n_2\, \delta y, \qquad \delta Y = \delta \frac{dy}{dt} + n_2\, \delta x.$$

Comme ici nos développements ne contiennent ni ϖ_3 ni ϖ_4, et que l'on a d'ailleurs

$$n_1 = n_1^0, \qquad n_2 = n_2^0, \qquad \delta n_1 = \delta n_2 = 0,$$

nous pourrions écrire

$$\delta \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\, \delta x}{\partial t}, \qquad \delta \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\, \delta y}{\partial t};$$

mais, comme nous retrouverons les mêmes équations un peu plus loin, j'aime mieux traiter tout de suite la question d'une façon un peu plus générale. Reprenons donc l'équation

$$\frac{dx}{dt} - X - n_2 y = 0,$$

et soit A ce que devient le premier membre quand on y substitue

les valeurs approchées (2). Nous aurons, en prenant les valeurs plus approchées (3),

$$\delta \frac{dx}{dt} - \delta X - n_2 \delta y = A.$$

D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{dx}{dw_i}, \qquad \delta \frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{d\,\delta x}{dw_i} + \sum \delta n_i \frac{dx}{dw_i}.$$

Nous pouvons remplacer dans le premier terme n_i par n_i^0 puisque δx est d'ordre $k+1$, de sorte que ce terme se réduit à $\frac{\partial\,\delta x}{\partial t}$; dans le second on a

$$\sum \delta n_i \frac{dx}{dw_i} = \nu\,\delta c \frac{dx}{d\tau_1} + \nu\,\delta g \frac{dx}{d\tau_2}.$$

Or, δc et δg étant respectivement d'ordre k et $k-1$, nous pouvons, dans le coefficient de δc, remplacer x par x_1 et, dans celui de δg, remplacer x par x_2 (où x_0, x_1, x_2 représentent les trois premières approximations de x). Nous pourrons donc écrire les équations suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial t} - \delta X - n_2\,\delta y = A - \nu\,\delta c \dfrac{dx_1}{d\tau_1} - \nu\, dg \dfrac{dx_2}{d\tau_2}, \\ \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial t} - \delta Y + n_2\,\delta x = A' - \nu\,\delta c \dfrac{dy_1}{d\tau_1} - \nu\,\delta g \dfrac{dy_2}{d\tau_2}, \\ \sum \delta x \dfrac{dX_0}{dm} - \sum \delta X \dfrac{dx_0}{dm} = \dfrac{d\,\delta S}{dm} - \delta z \dfrac{dZ_1}{dm} + \delta Z \dfrac{dz_1}{dm} - \sum u \dfrac{dv}{dm}, \\ \sum \delta x \dfrac{dX_0}{d\tau} - \sum \delta X \dfrac{dx_0}{d\tau} = \dfrac{d\,\delta S}{d\tau} - \delta z \dfrac{dZ_1}{d\tau} + \delta Z \dfrac{dz_1}{d\tau} - \sum u \dfrac{dv}{d\tau} + \delta B. \end{cases}$$

Les termes en δz et δZ sont nuls dans le cas qui nous occupe, de même que A, A′ et les termes en δc, δg; mais je préfère compléter tout de suite les équations (15), afin de pouvoir encore m'en servir dans les deux numéros suivants.

δS et δB sont connus; les arguments τ_1 et τ_2 n'intervenant pas, nous devons regarder δc et δg comme nuls; les seconds membres sont donc connus; nous avons donc à intégrer un système d'équations linéaires à second membre. Les équations linéaires sans second membre ne sont autre chose que celles que nous avons intégrées au n° 347; seulement notre système d'équations différentielles est du deuxième ordre au lieu du quatrième.

Nous n'aurons donc qu'à appliquer les méthodes des nos 349 et suivants; il n'y aurait de difficulté que si le déterminant

$$\frac{dx_0}{dm}\frac{dy_0}{d\tau}-\frac{dx_0}{d\tau}\frac{dy_0}{dm}$$

pouvait s'annuler, ce qui n'a pas lieu.

Il ne s'introduira pas de terme séculaire; cela ne serait possible que si l'argument de l'un des termes du second membre était le même que celui d'un des termes de ce que nous appelions dans le Chapitre précédent ξ_3 ou ξ_4, c'est-à-dire

$$\tau_1+(2k+1)\tau.$$

Or cela est impossible, puisque nos seconds membres sont indépendants de τ_1 et τ_2.

366. Passons maintenant au second cas :

2° μ est divisible par E_2, mais pas par E_1.

Alors nos fonctions dépendront de w_4 (c'est-à-dire de τ_2), mais pas de w_3 (c'est-à-dire de τ_1), et l'équation (8) s'écrira

$$\frac{\partial\,\delta S}{\partial t}=G-\delta H-\delta n_4\frac{dS_2}{dw_4}. \tag{8 bis}$$

Comme le second membre ne doit pas avoir de terme constant, et que $\frac{dS_2}{dw_4}$ n'en a pas, δH ne sera autre chose que le terme constant de G; δH étant ainsi connu, les équations (12) donnent

$$\frac{d\,\delta H}{dE_2}=B_2\frac{d\,\delta\nu_2}{dE_2}+\sum\delta B\frac{d\nu}{dE_2}+\sum Q\frac{dq}{dE_2}.$$

Or ν ne dépend que de m, ν_1 n'intervient pas et ν_3 est constant; on a donc

$$\delta B_1=0,\qquad \frac{d\nu}{dE_2}=\frac{d\nu_3}{dE_2}=0;$$

$$\sum\delta B\frac{d\nu}{dE_2}=\delta B_2\frac{d\nu_2}{dE_2},$$

d'où

$$\frac{d\,\delta H}{dE_2}=B_2\frac{d\,\delta\nu_2}{dE_2}+\delta B_2\frac{d\nu_2}{dE_2}+\sum Q\frac{dq}{dE_2}.$$

Nous prendrons δB_2 arbitrairement (en le prenant toutefois nul si

les exposants q de la caractéristique ne sont pas tous pairs). Tout sera connu, sauf $\frac{d\,\delta\nu_2}{dE_2}$; nous en tirerons donc cette quantité et par conséquent

$$\delta\nu_2 = \frac{E_2}{q_2 - 2}\frac{d\,\delta\nu_2}{dE_2},$$

puisque $\delta\nu_2$ est homogène d'ordre $q_2 - 2$ en E_2.

Connaissant $\delta\nu_2 = \delta n_4$, nous connaîtrons le second membre de l'équation (8 *bis*) et par conséquent δS à une constante près qui est nulle, puisque δS est une fonction impaire.

Cela posé, venons aux équations (5); elles nous donnent

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\delta S}{dE_2} = \delta z \dfrac{dZ_1}{dE_2} - \delta Z \dfrac{dz_1}{dE_2} \qquad + \sum u \dfrac{dv}{dE_2}, \\ \dfrac{d\,\delta S}{d\tau_2} = \delta z \dfrac{dZ_1}{d\tau_2} - \delta Z \dfrac{dz_2}{d\tau_2} - \delta B_2 + \sum u \dfrac{dv}{d\tau_2}; \end{cases}$$

u, v, z_1, Z_1 sont des fonctions connues, δB_2 a été choisi arbitrairement, on vient de déterminer δS; nous pourrons donc déterminer *sans intégration* les deux inconnues restantes δz et δZ à l'aide des équations du premier degré (16). Le déterminant de ces équations,

$$\frac{dZ_1}{dE_2}\frac{dz_1}{d\tau_2} - \frac{dz_1}{dE_2}\frac{dZ_1}{d\tau_2},$$

ne peut s'annuler, car il se réduit à une constante; on n'aura donc pas, pour résoudre les équations (16), à effectuer de division.

Les équations (5) nous donnent ensuite

$$\frac{d\,\delta S}{d\tau_3} = -\delta B_3 + \sum u \frac{dv}{d\tau_3},$$

ce qui montre que δB_3 est égal au terme constant de $\sum u \frac{dv}{d\tau_3}$. Les équations (12) donnent

$$\frac{d\,\delta H}{dm} = B_2 \frac{d\,\delta\nu_2}{dm} + \delta B \frac{d\nu}{dm} + \delta B_2 \frac{d\nu_2}{dm} + \sum Q \frac{dq}{dm}.$$

Tout étant connu excepté δB, cela détermine δB.

Venons enfin aux équations (15). Dans ces équations, τ_1 n'intervenant pas, tout se passe comme si δc était nul; $\delta g = \frac{\delta\nu_3}{\nu}$ est connu;

on vient donc de déterminer δS et δB; tout est donc connu, sauf

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta X, \quad \delta Y.$$

Ces quantités se détermineront donc facilement par l'intégration des équations (15); on démontrerait comme au numéro précédent qu'il ne peut pas s'introduire de termes séculaires.

367. Passons au troisième cas :

3° μ est divisible par E_1 et par E_2. On peut alors éviter une intégration.

Les équations (5) nous donnent

$$\frac{d\,\delta S}{dE_1} = \sum u \frac{dv}{dE_1},$$

car x_0, X_0, z_1, Z_1 ne dépendent pas de E_1; si alors δS et v sont homogènes de degrés q_1 et k en E_1, on en tire

$$q_1\,\delta S = \sum kuv,$$

ce qui détermine δS.

On a ensuite

$$\frac{d\,\delta S}{dE_2} = \delta z \frac{dZ_1}{dE_2} - \delta Z \frac{dz_1}{dE_2} + \sum u \frac{dv}{dE_2},$$
$$\frac{d\,\delta S}{d\tau_2} = \delta z \frac{dZ_1}{d\tau_2} - \delta Z \frac{dz_1}{d\tau_2} - \delta B_2 + \sum u \frac{dv}{d\tau_2},$$

ce qui détermine δz et δZ, la constante δB_2 pouvant être choisie arbitrairement. Puis

$$\frac{d\,\delta S}{d\tau_3} = -\delta B_3 + \sum u \frac{dv}{d\tau_3}, \qquad \frac{d\,\delta S}{d\tau_1} = -\delta B_1 + \sum u \frac{dv}{d\tau_1},$$

ce qui montre que δB_3 et δB_1 sont égaux aux termes constants de

$$\sum u \frac{dv}{d\tau_3}, \qquad \sum u \frac{dv}{d\tau_1}.$$

Il reste à déterminer δB et δg, d'où dépend $\delta \nu_2$; pour cela nous nous servirons des équations (12), qui nous donnent

$$\frac{d\,\delta H}{dE_1} = B_2 \frac{d\,\delta \nu_2}{dE_1} + \sum \delta B \frac{d\nu}{dE_1} + \sum Q \frac{dq}{dE_1}.$$

Dans le coefficient de δB, nous pouvons remplacer les ν par leurs valeurs approchées, $\nu = n_1 - n_2$, $\nu_1 = c_0 \nu$, ...; dans ces conditions, les ν ne dépendent pas de E_1 et il reste

$$\frac{d\,\delta H}{dE_1} = B_2 \frac{d\,\delta\nu_2}{dE_1} + \sum Q \frac{dq}{dE_1},$$

et l'on aurait de même

$$\frac{d\,\delta H}{dE_2} = B_2 \frac{d\,\delta\nu_2}{dE_2} + \sum Q \frac{dq}{dE_2};$$

et l'on en déduit

$$q_1\,\delta H = \quad B_2 q_1\,\delta\nu_2 \quad + \sum k Q q,$$

$$q_2\,\delta H = B_2(q_2 - 2)\,\delta\nu_2 + \sum k' Q q,$$

q étant supposé homogène de degrés k et k' tant en E_1 qu'en E_2. De ces deux équations on tirerait δH et $\delta\nu_2$ (d'où δg).

Le procédé deviendrait illusoire pour $q_2 = 0$, mais dans ce cas l'argument τ_2 et par conséquent $\delta\nu_2$ n'interviennent pas.

On trouve ensuite

$$\frac{d\,\delta H}{dm} = B_2 \frac{d\,\delta\nu_2}{dm} + \delta B \frac{d\nu}{dm} + \sum \delta B_i \frac{d\nu_i}{dm} + \sum Q \frac{dq}{dm},$$

d'où l'on tire δB.

On déterminera enfin δx, δy, δX, δY par le moyen des équations (15); dans les seconds membres tout est connu, à l'exception de la constante δc. On disposera de cette constante de façon à faire disparaître les termes séculaires, qui cette fois ne sont pas nuls d'eux-mêmes. La détermination de toutes nos inconnues est donc achevée.

368. Cette méthode a été exposée, mais sous une forme et avec des notations différentes, dans le Tome XVII du *Bulletin astronomique*, p. 87 et 167. Quand on veut l'expression analytique des coefficients, elle présente l'avantage de rendre plus rapide le travail de substitution (puisqu'on n'a qu'à faire les substitutions dans Φ'_1, au lieu de les faire dans les trois dérivées de cette fonction) et d'amener à l'intégration d'un système du deuxième ordre au lieu du quatrième. Elle est susceptible de plusieurs variantes.

1° Nous pouvons employer un artifice analogue à celui des nos 327 et 347, en envisageant un problème plus général que le problème proposé. Nous avons

$$\Phi'_1 = \frac{\Sigma X^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r} + n_2(Xy - Yx) - n_2^2 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2} - n_2^2 \Theta,$$

le dernier terme $-n_2^2\Theta$ représentant l'ensemble des termes contenant en facteur α ou E_3. Prenons la formule plus générale

$$\Phi'_1 = \frac{\Sigma X^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r} + n_2(Xy - Yx)$$
$$- n_2^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} - 3h^2 \frac{x^2 - y^2 - z^2}{4} - h^2\Theta,$$

qui se réduit à la première pour $h = n_2$. Au n° 347, nous avons posé

$$n_2 = p\nu, \qquad h = m\nu;$$

nous poserons cette fois, ce qui revient au même,

$$n_2 = m\nu, \qquad h = \beta m\nu.$$

Nous appliquerons ensuite la méthode en développant, non plus seulement suivant les puissances de α et des E, mais suivant celles de β, de α et des E, de telle façon que x_0, par exemple, représente l'ensemble des termes indépendants de α, des E *et de* β. Le nombre des termes à calculer se trouve un peu augmenté; en revanche, $x_0, y_0, X_0, Y_0, z_1, Z_1$ se réduisent à un seul terme en $\cos\tau$, $\sin\tau$, $\cos\tau_2$ ou $\sin\tau_2$.

2° On pourrait, au contraire, achever d'abord le développement par rapport à α en regardant les E comme nuls, puis développer ensuite par rapport aux E, en regardant x_0 par exemple comme l'ensemble des termes de degré zéro par rapport aux E seulement, mais de degré quelconque par rapport à α. Ou bien développer d'abord par rapport à E_1 et E_2, et ensuite par rapport à α et E_3. Cela entraîne dans la méthode quelques petites modifications sur lesquelles nous n'insisterons pas.

3° Au lieu de prendre les coordonnées rectangulaires x, y, z et leurs variables conjuguées X, Y, Z, on peut prendre les coordonnées polaires et leurs variables conjuguées. La méthode fondée uniquement sur les propriétés des équations canoniques restera applicable, sauf quelques modifications de détail.

Théorèmes d'Adams.

369. Reprenons l'équation du n° 362,

$$\frac{d\Omega''}{dt} = \Phi'_1 + \sum x \frac{dX}{dt} - \mathrm{H},$$

où cette fois $\sum x\mathrm{X}$ signifie $x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z}$. Posons

$$\mathrm{V} = \Omega'' - \sum \frac{x\mathrm{X}}{2};$$

il viendra

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \Phi'_1 + \frac{1}{2}\sum x \frac{d\mathrm{X}}{dt} - \frac{1}{2}\sum \mathrm{X}\frac{dx}{dt} - \mathrm{H}.$$

Mais

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{F}'}{d\mathrm{X}} = \frac{d\Phi'_1}{d\mathrm{X}}, \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}'}{dx} = -\frac{d\Phi'_1}{dx}.$$

Donc

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \Phi'_1 - \frac{1}{2}\sum x \frac{d\Phi'_1}{dx} - \frac{1}{2}\sum \mathrm{X}\frac{d\Phi'_1}{d\mathrm{X}} - \mathrm{H}.$$

Soit

$$\Phi'_1 = \sum \varphi_k,$$

φ_k représentant l'ensemble des termes homogènes de degré k en $x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$; on aura, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\sum x \frac{d\Phi'_1}{dx} + \sum \mathrm{X}\frac{d\Phi'_1}{d\mathrm{X}} = \sum k\varphi_k,$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \sum\left(1 - \frac{k}{2}\right)\varphi_k - \mathrm{H}.$$

V étant une fonction périodique, H ne sera autre chose que le terme constant de $\left(1 - \frac{k}{2}\right)\varphi_k$.

Mais, si l'on néglige la parallaxe, on a

$$\Phi'_1 = \frac{\Sigma \mathrm{X}^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r} + n_2(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) - n_2^2 \mathrm{P}_2 \mathrm{AC}^2\left(\frac{a'}{\mathrm{BD}}\right)^3$$

(*cf.* n° 315).

Tous les termes sont homogènes de degré 2, sauf le terme en $\frac{1}{r}$,

qui est de degré -1. Donc

$$\sum\left(1-\frac{k}{2}\right)\varphi_k = \frac{3}{2}\,\frac{m_1+m_7}{r}.$$

Donc, si la parallaxe est nulle, H *n'est autre chose que le terme constant de* $\frac{1}{r}$, *au facteur constant près*

$$\frac{3}{2}(m_1+m_7).$$

370. Cela posé, prenons l'équation (9) du nº 363,

$$dH = \sum B\, d\nu.$$

Comme ν et ν_3 ne dépendent ni de E_1 ni de E_2, elle nous donne

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{dH}{dE_1} = B_1\dfrac{d\nu_1}{dE_1} + B_2\dfrac{d\nu_2}{dE_1} = \sum B\dfrac{d\nu}{dE_1}, \\[2mm] \dfrac{dH}{dE_2} = B_1\dfrac{d\nu_1}{dE_2} + B_2\dfrac{d\nu_2}{dE_2} = \sum B\dfrac{d\nu}{dE_2}, \end{cases}$$

d'où

$$(18)\qquad E_1\frac{dH}{dE_1} + E_2\frac{dH}{dE_2} = \sum B\left(E_1\frac{d\nu}{dE_1} + E_2\frac{d\nu}{dE_2}\right).$$

Soit

$$H = H_0 + H_2 + H_4 + \ldots,$$

H_k représentant l'ensemble des termes de degré k par rapport à E_1 et E_2, et de degré quelconque en α et E_3. Le théorème des fonctions homogènes nous donne

$$E_1\frac{dH}{dE_1} + E_2\frac{dH}{dE_2} = 2H_2 + 4H_4 + \ldots.$$

Donc $2H_2$ représente l'ensemble des termes de degré 2 dans le second membre de (18). Or B_1 et B_2 sont divisibles respectivement par E_1^2 et E_2^2; d'autre part, $E_1\frac{d\nu}{dE_1} + E_2\frac{d\nu}{dE_2}$ s'annule avec E_1 et E_2. Donc les termes du second degré sont nuls, donc

$$H_2 = 0.$$

Donc les coefficients de E_1^2 et de E_2^2 sont nuls quels que soient

α et E_3 dans le développement de H; ils sont donc nuls, si $\alpha = 0$ et quel que soit E_3 dans le développement du terme constant de $\frac{1}{r}$.

371. Soit maintenant

$$H_4 = aE_1^4 + 2bE_1^2E_2^2 + cE_2^4.$$

Soient

$$\nu_1 = \lambda_1 + \mu_1 E_1^2 + \mu'_1 E_2^2 + \ldots,$$
$$\nu_2 = \lambda_2 + \mu_2 E_1^2 + \mu'_2 E_2^2 + \ldots,$$
$$B_1 = \beta E_1^2 + \ldots, \qquad B_2 = \gamma E_2^2 + \ldots$$

les premiers termes des développements de ν_1, ν_2, β, γ suivant les puissances de E_1 et de E_2; ces coefficients a, b, c, λ, μ, β, γ sont eux-mêmes des fonctions de E_3 ou de α, ou de E_3 seulement si nous supposons $\alpha = 0$.

Les équations (17) nous donnent alors

$$4aE_1^3 + 4bE_1E_2^2 + \ldots = 2\beta\mu_1 E_1^3 + 2\gamma\mu_2 E_1 E_2^2 + \ldots,$$
$$4bE_1^2E_2 + 4cE_2^3 + \ldots = 2\beta\mu'_1 E_1^2 E_2 + 2\gamma\mu'_1 E_2^3 + \ldots,$$

d'où

$$2a = \beta\mu_1, \qquad 2b = \beta\mu'_1 = \gamma\mu_2, \qquad 2c = \gamma\mu'_2,$$

ou

$$\frac{a}{\mu_1} = \frac{b}{\mu'_1}, \qquad \frac{b}{\mu_2} = \frac{c}{\mu'_2}.$$

C'est là une relation entre les coefficients du développement de ν_1 et de ν_2, et par conséquent de c et de g d'une part, et ceux du développement de H, et par conséquent (en supposant $\alpha = 0$) du terme constant de $\frac{1}{r}$.

CHAPITRE XXX.

ACTION DES PLANÈTES.

372. Pour étudier l'action d'une planète troublante sur le système formé par le Soleil et une planète troublée, on commence par former les équations du mouvement de ce système comme si la planète troublante n'existait pas. Ce mouvement est alors képlérien et, en seconde approximation, on étudie les perturbations de ce mouvement képlérien par la planète troublante; pour cela on applique la méthode de la variation des constantes.

Nous opérerons absolument de la même manière pour étudier le mouvement du système quadruple formé par le Soleil, la Terre, la Lune et une planète. Comme première approximation, nous intégrerons les équations du mouvement du système triple : Soleil, Terre, Lune; c'est ce que nous avons fait dans les Chapitres précédents; nous avons obtenu ainsi les coordonnées des trois astres de ce système en fonction du temps et d'un certain nombre de constantes d'intégration C. Nous devons ensuite étudier les perturbations de ce mouvement par la planète, c'est-à-dire déterminer les petites variations des constantes C dues à l'action de cette planète. Cette façon d'appliquer la méthode de la variation des constantes a été proposée et mise en œuvre par M. Newcomb.

Reprenons les notations des n^os 42 (t. I, Chap. II) et 312 (Chap. XXIV). Soient

A la Lune,
B le Soleil,
C la Terre,
P la planète,
D le centre de gravité du système Terre, Lune,
G celui du système Terre, Lune, Soleil.

Soient

x_1,	x_2,	x_3,	$m_1 = m_2 = m_3$	les coordonnées et la masse de	A;
x_4,	x_5,	x_6,	$m_4 = m_5 = m_6$	»	B;
x_7,	x_8,	x_9,	$m_7 = m_8 = m_9$	»	C;
x_{10},	x_{11},	x_{12},	$m_{10} = m_{11} = m_{12}$	»	P;

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Soient

x'_1,	x'_2,	x'_3	les trois projections de	AC;
x'_4,	x'_5,	x'_6	»	BD;
x'_{10},	x'_{11},	x'_{12}	»	PG;

$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7};$$

$$m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7};$$

$$m'_{10} = m'_{11} = m_{12} = \frac{m_{10}(m_1 + m_4 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7 + m_{10}};$$

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Soient

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{y^2}{m} = \frac{1}{2} \sum \frac{y'^2}{m'}$$

l'énergie cinétique et

$$U = -\left(\frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}\right) - \left(\frac{m_{10} m_1}{PA} + \frac{m_{10} m_4}{PB} + \frac{m_{10} m_7}{PC}\right)$$

l'énergie potentielle; $F = T + U$ l'énergie totale; nous aurons les équations canoniques

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}.$$

Nous diviserons T et U en plusieurs parties; nous poserons

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$
$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6,$$

et

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum \frac{y_i'^2}{m_i'} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum \frac{y_i'^2}{m_i'} \qquad (i = 4, 5, 6),$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum \frac{y_i'^2}{m_i'} \qquad (i = 10, 11, 12),$$

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 = -\frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

$$U_4 = -\frac{m_{10}(m_1 + m_4 + m_7)}{PG},$$

$$U_5 = m_4 m_{10}\left(\frac{1}{PG} - \frac{1}{PB}\right) + m_{10}(m_1 + m_7)\left(\frac{1}{PG} - \frac{1}{PD}\right),$$

$$U_6 = m_1 m_{10}\left(\frac{1}{PD} - \frac{1}{PA}\right) + m_7 m_{10}\left(\frac{1}{PD} - \frac{1}{PC}\right).$$

On voit que T_1 et U_1 dépendent seulement des coordonnées de la Lune (et des y_i' correspondants); T_2 et U_2 des coordonnées du Soleil; T_3 et U_4 de celles de la planète; U_3 de celles de la Lune et du Soleil; U_5 de celles de la planète et du Soleil, et enfin U_6 de celles de la Lune, du Soleil et de la planète.

373. Il faut maintenant voir quel est l'ordre de grandeur de ces différentes quantités. Je supposerai que l'on ait pris une unité de longueur de l'ordre de BD, de telle sorte que AC soit de l'ordre de la parallaxe α, ce que j'écrirai

$$BD \sim 1, \qquad AC \sim \alpha;$$

je prendrai de même une unité de masse de l'ordre de la masse du Soleil m_4, de sorte que

$$m_4 \sim 1.$$

Pour les planètes inférieures, on aura

$$m_{10} \sim m_7, \qquad PD \sim 1.$$

Pour les grosses planètes, m_{10} sera beaucoup plus grand que m_7;

mais en revanche PA, PB, PC seront beaucoup plus grands que 1, et cela fera une sorte de compensation; nous admettrons donc dans tous les cas

$$m_{10} \sim m_7, \qquad \text{PD} \sim 1.$$

Nous trouvons ainsi

$$\begin{gathered}
T_1 \sim U_1 \sim \frac{m_1 m_7}{\alpha}, \\
T_2 \sim U_2 \sim m_7, \\
U_3 \sim \alpha^2 m_1, \\
T_3 \sim U_4 \sim m_7, \\
U_5 \sim m_7^2, \qquad U_6 \sim \alpha^2 m_1 m_7.
\end{gathered}$$

Nous poserons maintenant

$$\begin{gathered}
F = F' + F'', \\
F'_0 = T_2 + T_3 + U_2 + U_4, \qquad F' = F'_0 + U_5, \\
F' = T_2 + T_3 + U_2 + U_4 + U_5, \\
F''_0 = T_1 + U_1 + U_3, \qquad F'' = F''_0 + U_6.
\end{gathered}$$

Nous observons :

1° Que F' ne dépend pas des coordonnées de la Lune;
2° Que U_3 et U_6 sont négligeables devant F';
3° Que T_1 et U_1 ne dépendent que des coordonnées de la Lune.

Il en résulte qu'en ce qui concerne les coordonnées du Soleil et de la planète, nous pouvons nous contenter des équations

$$(1) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6, 10, 11, 12).$$

Pour la détermination des coordonnées de la Lune, nos équations se réduisent à

$$(2) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF''}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF''}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

374. En première approximation, nous négligerons U_5 devant F'_0, et U_6 devant F''_0. Dans ces conditions, nos équations se réduisent à

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_0}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6, 10, 11, 12),$$

$$(2\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF''_0}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or on voit que F'_0 se compose de deux parties, l'une dépendant seulement des coordonnées du Soleil et l'autre de celles de la planète, et que F''_0 n'est autre chose que la fonction $m'_1 \Phi_1$ du n° 312 (Chap. XXIV). D'où cette conséquence que, si l'on se borne aux équations (1 *bis*) et (2 *bis*), le mouvement du Soleil B par rapport au point D et celui de la planète P par rapport au point G sont des mouvements képlériens.

D'autre part, le mouvement de la Lune par rapport à la Terre est celui qui a été étudié dans les Chapitres XXV à XXIX. Nous supposerons donc qu'on a complètement déterminé ce mouvement en appliquant les procédés exposés dans ces Chapitres.

Les quantités

$$x'_i, \quad y'_i \qquad (i = 4, 5, 6, 10, 11, 12)$$

s'exprimeront donc en fonctions du temps et des douze éléments (canoniques ou elliptiques, cf. n° 58) de l'orbite de B autour de D et de celle de P autour de G, ou bien, si l'on préfère, en fonctions des deux longitudes moyennes de B dans son mouvement képlérien autour de D et de P dans son mouvement képlérien autour de G, et des dix autres éléments (canoniques ou elliptiques) des deux orbites.

Les quantités

$$x'_i, \quad y'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

pourront s'exprimer en fonctions du temps, des six éléments de l'orbite elliptique de B autour de D et de six autres constantes d'intégration, ou bien encore en fonctions : 1° de la longitude moyenne du Soleil, c'est-à-dire de l'argument τ_3; 2° des cinq autres éléments de l'orbite elliptique du Soleil; 3° des trois arguments τ, τ_1, τ_2; 4° des trois constantes E_1, E_2, m (ou de trois fonctions quelconques de ces trois constantes et des cinq éléments de l'orbite solaire).

375. Ainsi nos 18 variables x'_i, y'_i se trouvent exprimées en fonctions de 5 arguments variant proportionnellement au temps, qui sont les deux longitudes moyennes de B et de P, et les trois arguments τ, τ_1, τ_2, et de 13 constantes d'intégration.

Quand on a intégré les équations (1 *bis*) et (3 *bis*), on connaît

les relations qui relient les 18 variables, ces 5 arguments et ces 13 constantes.

Supposons maintenant que nous poussions plus loin l'approximation et que nous revenions aux équations (1) et (2). Nous pourrons alors définir 18 variables nouvelles qui seraient liées aux 18 variables anciennes x' et y' par les mêmes relations que l'étaient nos 5 arguments et nos 13 constantes quand nous nous contentions des équations (1 *bis*) et (2 *bis*). Ces 18 variables pourront être regardées comme les *éléments osculateurs* des trois orbites de B autour de D, de P autour de G, de A autour de C. Seulement ces éléments osculateurs ne seront plus, les uns des fonctions linéaires du temps, les autres des constantes; tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'à cause de la petitesse des termes complémentaires U_5 et U_6, les uns varieront *à peu près* proportionnellement au temps, et les autres *très lentement*.

Opérant tout à fait comme au n° 79 (t. I, Chap. IV), nous allons faire un changement de variables en prenant pour variables nouvelles ces 18 éléments osculateurs; mais, pour l'application de la méthode de Lagrange, il convient de choisir ces variables (que nous n'avons pas encore complètement définies) de telle façon que la forme canonique des équations ne soit pas altérée.

1° Pour les 6 éléments du Soleil, nous choisirons les éléments canoniques

$$L, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda, \quad \eta_1, \quad \eta_2,$$

définis au n° 58. La longitude moyenne λ n'est autre chose que notre argument τ_3; d'ailleurs $\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}$ sera de l'ordre de E_3, et pourrait jouer le même rôle que E_3 dans l'analyse des Chapitres précédents. Dans ces conditions,

$$x'_4\,dy'_4 + x'_5\,dy'_5 + x'_6\,dy'_6 - \lambda\,dL - \sum \eta\,d\xi \tag{3}$$

est une différentielle exacte, ce qui est la condition pour que les équations conservent la forme canonique.

2° Pour les 6 éléments de la planète, nous choisirons également les éléments canoniques

$$L, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda, \quad \eta_1, \quad \eta_2$$

du n° 58. Mais d'ailleurs ces éléments ne joueront aucun rôle dans

l'analyse qui va suivre; et en ce qui les concerne, les équations (1) nous donneraient simplement les perturbations du mouvement de la planète par le système Terre-Lune supposé réduit à un point mathématique; ces perturbations ont été déterminées dans le Tome I.

3° Pour les 6 éléments de la Lune, nous prendrons les 3 arguments τ, τ_1, τ_2 et les 3 constantes B, B_1, B_2 du Chapitre précédent. Si nous rapprochons les formules

$$\sum x'\,dy'' = \sum x\,dX + (Xy - Yx)\,du,$$

$$\sum x\,dX - d\Omega'' = \sum A'\,dw - \frac{\Phi'_1\,dw_2}{n_2},$$

$$\Phi'_1 = \Phi_1 + n_2(Xy - Yx),$$

$$u = w_2 = \tau_3, \qquad y'_i = m'_1 y''_i,$$

$$\sum x\,dX - d\Omega'' = \sum B\,d\tau - E_3\Phi\,d\tau_3,$$

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum A'\,dw - \frac{\Phi_1\,dw_2}{n_2}$$

des nos 318, 320 (Chap. XXIV) et 360 (Chap. XXIX), nous pourrons écrire

$$m'_1\,d\Omega'' = \sum x'_i\,dy'_i - \sum m'_1 B_i\,d\tau_i + m'_1 E_3\Phi\,d\tau_3 - m'_1(Xy - Yx)\,d\tau_3.$$

Toutes ces formules supposent que les éléments du Soleil, et en particulier E_3, sont regardés comme des constantes. Si nous supposons de plus $d\tau_3 = 0$, nous verrons que l'expression

$$x'_1\,dy'_1 + x'_2\,dy'_2 + x'_3\,dy'_3 - m'_1(B\,d\tau + B_1\,d\tau_1 + B_2\,d\tau_2) \tag{4}$$

est une différentielle exacte, en supposant que les six éléments solaires (en y comprenant E_3 et τ_3) soient regardés comme des constantes.

Il vaudra mieux d'ailleurs écrire la relation précédente sous la forme suivante (en divisant par m'_1),

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau + E_3\Phi\,d\tau_3 - (Xy - Yx)\,d\tau_3,$$

ou, mieux encore, nous remarquerons que τ_3 ne joue pas le même rôle que les autres arguments τ et nous mettrons en évidence le

terme en $d\tau_3$ en posant

$$\sum B\, d\tau = B\, d\tau + B_1\, d\tau_1 + B_2\, d\tau_2$$

et en écrivant par conséquent dans les formules précédentes

$$\sum B\, d\tau + B_3\, d\tau_3$$

au lieu de $\sum B\, d\tau$, ce qui donne

$$d\Omega'' = \sum x'\, dy'' - \sum B\, d\tau - d\tau_3(B_3 - E_3\Phi - Xy + Yx).$$

Nous rappellerons ensuite la formule

$$\frac{\Phi'_1}{n_2} = K + E_3\Phi$$

du n° 360, et nous poserons

$$B_3 = \frac{G}{n_2} - K.$$

Nous aurons alors

$$(5) \qquad d\Omega'' = \sum x'\, dy'' - \sum B\, d\tau - (G - \Phi_1)\frac{d\tau_3}{n_2};$$

cette formule suppose que tous les éléments solaires, sauf τ_3, sont des constantes. Si nous regardons de plus τ_3 comme une constante, nous aurons l'expression

$$(4\ bis) \qquad \sum x'\, dy'' - \sum B\, d\tau,$$

qui sera une différentielle exacte.

376. Nous n'avons pas à revenir sur ce qui concerne les équations (1). On intègre d'abord les équations approchées (1 *bis*), qui définissent le mouvement képlérien de la planète par rapport au point G, et du Soleil par rapport au point D; on en déduira l'intégrale des équations exactes (1) par la méthode de la variation des constantes. Ce n'est pas autre chose que l'étude des perturbations mutuelles de la planète et du système Terre-Lune (supposé concentré en son centre de gravité D), étude qui a été faite complètement dans le Tome I. Passons donc aux équations (2), que nous

écrirons

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\frac{F''}{m'_1}}{dy''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt} = -\frac{d\frac{F''}{m'_1}}{dx'_i}. \tag{6}$$

Nous allons prendre pour variables nouvelles les éléments canoniques solaires et les six variables τ, τ_1, τ_2, B, B_1, B_2. Les coordonnées x', les y'' et Ω'' vont être des fonctions de ces six variables τ et B, de τ_3, et des cinq autres éléments solaires que j'appellerai les γ_i.

La formule (5) suppose que ces γ_i sont constants; si on les regarde comme variables, cette formule doit être complétée et l'on doit écrire

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - (G - \Phi_1)\frac{d\tau_3}{n_2} + \sum \Gamma_i\,d\gamma_i, \tag{5 bis}$$

en posant

$$\Gamma_i = \frac{d\Omega''}{d\gamma_i} - \sum x'\frac{dy''}{d\gamma_i}.$$

Pour savoir ce que vont devenir les équations (6) par ce changement de variables, il faut se reporter au théorème du n° 12. Dans ce numéro on envisage un système d'équations canoniques où F dépend explicitement du temps; on fait un changement de variables, les variables nouvelles x' et y' étant fonctions des variables anciennes x et y et du temps t. On suppose que

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

soit une différentielle exacte, *en supposant* $dt = 0$, et que

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy - W\,dt$$

soit une différentielle exacte pour $dt \gtrless 0$; dans ce cas les équations conservent la forme canonique, mais la fonction F doit être remplacée par F — W.

Nous pouvons appliquer ici ce théorème, car, les équations (1) étant intégrées, les éléments γ_i et τ_3 peuvent être regardés comme des fonctions connues du temps. Nous pouvons donc écrire

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau + W\,dt, \tag{5 ter}$$

en posant

$$W = (\Phi_1 - G)\frac{1}{n_2}\frac{d\tau_3}{dt} + \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt},$$

et les équations (6) deviendront

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dB}, \tag{7}$$

en posant

$$\Phi_2 = \frac{F''}{m'_1} - W.$$

Il est bon de remarquer que cette analyse ne suppose nullement qu'on ait choisi pour les γ_i les éléments canoniques du Soleil, qu'on peut tout aussi bien choisir des fonctions quelconques de ces six éléments canoniques et en particulier les éléments elliptiques.

377. Nous devons parmi les éléments solaires faire une distinction; les coordonnées x, y, z, telles qu'elles ont été calculées dans les Chapitres précédents, dépendent de τ_3, anomalie moyenne du Soleil, ainsi que de l'excentricité solaire E_3, et du grand axe de l'orbite solaire inversement proportionnel à la parallaxe α. Elles ne dépendent pas des trois autres éléments qui sont la longitude du périhélie terrestre et les angles qui définissent l'orientation de l'écliptique mobile par rapport aux axes fixes. Il en est de même de X, Y, Z et Ω''; ces fonctions sont également indépendantes de ces trois derniers éléments, que j'appellerai les *éléments d'orientation.*

Nous avons écrit plus haut

$$\sum x' \, dy'' = \sum x \, dX + (Xy - Yx)\, d\tau_3,$$

mais en supposant $d\gamma_i = 0$. En regardant les γ_i comme des variables il convient d'écrire

$$\sum x' \, dy'' = \sum x \, dX + (Xy - Yx)\, d\tau_3 + \sum A_i \, d\gamma_i,$$

d'où

$$\sum x' \frac{dy''}{d\gamma_i} = \sum x \frac{dX}{d\gamma_i} + A_i.$$

Si γ_i est un élément d'orientation, on aura

$$\frac{d\Omega''}{d\gamma_i} = \frac{dX}{d\gamma_i} = 0,$$

et par conséquent

$$\Gamma_i = \frac{d\Omega''}{d\gamma_i} - \sum x \frac{dX}{d\gamma_i} - A_i = -A_i.$$

Qu'est-ce maintenant que A_i? Si les trois éléments d'orientation $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ subissent trois accroissements $d\gamma_1, d\gamma_2, d\gamma_3$, tout se passera comme si les axes mobiles des x, y, z subissaient trois rotations infiniment petites, par rapport aux axes fixes des x'_1, x'_2, x'_3. Si l'on s'arrange pour que les axes mobiles coïncident à l'origine des temps avec les axes fixes, ces trois rotations s'opéreront autour des trois axes et l'on aura

$$A_1 = \sum x' \frac{dy''}{d\gamma_1} - \sum x \frac{dX}{d\gamma_1} = Yz - Zy,$$
$$A_2 = \sum x' \frac{dy''}{d\gamma_2} - \sum x \frac{dX}{d\gamma_2} = Zx - Xz,$$
$$A_3 = \sum x' \frac{dy''}{d\gamma_3} - \sum x \frac{dX}{d\gamma_3} = Xy - Yx.$$

378. Si nous supposons que la masse m_{10} soit nulle, les γ_i se réduisent à des constantes ainsi que $\frac{d\tau_3}{dt}$, et l'on a

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\tau_3}{dt} = n_2, \qquad W = \Phi_1 - G.$$

On a d'autre part

$$F'' = F''_0 = T_1 + U_1 + U_3 = m'_1 \Phi_1,$$

d'où finalement

$$\Phi_2 = G.$$

G est fonction simplement des B et des γ_i; les équations canoniques se réduisent à

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dG}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\tau_i}{dt} = \nu_i = -\frac{dG}{dB_i}.$$

Nous pourrons donc écrire

$$-dG = \nu\, dB + \nu_1\, dB_1 + \nu_2\, dB_2,$$

en regardant les γ comme des constantes. Si nous rapprochons de la formule du n° 363

$$dH = B\,d\nu + B_1\,d\nu_1 + B_2\,d\nu_2,$$

nous en tirerons

$$H - G = B\nu + B_1\nu_1 + B_2\nu_2,$$

plus une fonction arbitraire des γ_i que nous pouvons supposer nulle. Nous aurions pu déduire cette même formule de la formule (9) du n° 363 qui peut s'écrire

$$H = B\nu + B_1\nu_1 + B_2\nu_2 + B_3\nu_3 + K\nu_3$$

et de la définition de G au n° 375 qui peut s'écrire

$$G = B_3\nu_3 + K\nu_3.$$

379. Supposons maintenant que m_{10} ne soit pas nul; alors $\frac{d\gamma_i}{dt}$ ne sera plus nul, mais très petit; $\frac{d\tau_3}{dt}$ ne sera plus égal à une constante, mais nous pourrons poser

$$\frac{1}{n_2}\frac{d\tau_3}{dt} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant très petit. Nous aurons d'autre part

$$F'' = m'_1\Phi_1 + U_6,$$

d'où enfin

$$\Phi_2 = G + \frac{U_6}{m'_1} + (G - \Phi_1)\varepsilon - \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt}.$$

Nous pouvons poser encore

$$G = G_0 + \delta G,$$

G_0 étant ce que devient G quand on y remplace les γ_i par leurs valeurs initiales et étant, en conséquence, fonction seulement de B, B_1 et B_2, et δG étant très petit, puis écrire

$$R = \frac{U_6}{m'_1} + (G - \Phi_1)\varepsilon - \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt},$$

d'où

$$\Phi_2 = G + R,$$

ce qui nous donne finalement les équations

$$(8) \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dG}{dB} - \frac{dR}{dB},$$

R étant très petit; nous pouvons dans les dérivées de R remplacer les variables par leurs valeurs approchées; R et ses dérivées pourront alors être regardées comme des fonctions connues du temps. Ce seront des fonctions périodiques par rapport aux cinq arguments

$$\tau,\quad \tau_1,\quad \tau_2,\quad \tau_3,\quad \tau_4,$$

τ_4 étant l'anomalie moyenne de la planète, lesquels arguments, réduits à leurs valeurs approchées, sont des fonctions linéaires du temps. Les dérivées de R se présenteront donc sous la forme

$$\sum A \cos(\alpha t + \beta),$$

les A, les α et les β étant des constantes.

On aura alors les B par de simples quadratures; les B étant déterminés et les γ l'ayant été préalablement à l'aide des équations (1), il en sera de même des dérivées $\frac{dG}{dB}$ qui ne dépendent que des B et des γ; on pourra avoir les τ par quadrature. C'est absolument ce que nous avons fait dans les Chapitres IV et V.

380. Il y a une autre manière de comprendre l'application de la méthode de la variation des constantes. Si m_{10} était nul, nous aurions certaines relations entre nos variables x'_i, y''_i $(i=1, 2, 3)$, les éléments lunaires B et τ et les éléments solaires τ_3 et γ_i; soient

$$(9)\qquad \begin{matrix} x'_i \\ y''_i \end{matrix} = f(B, \tau, \gamma_i, \tau_3)$$

ces relations. Si m_{10} n'est pas nul, de sorte que les éléments de l'orbite solaire soient variables, nous pouvons conserver les relations (9) comme définitions des éléments osculateurs B et τ; c'est ce que nous avons fait jusqu'ici, mais on peut aussi opérer autrement.

Soient γ_i^0 les valeurs initiales des γ_i; soit

$$\tau_3^0 = n_2^0 t + \varepsilon_0,$$

n_2^0 et ε_0 étant les valeurs initiales de n_2 et de τ_3; remplaçons alors les équations (9) par les suivantes :

$$(9\ bis)\qquad \begin{matrix} x'_i \\ y''_i \end{matrix} = f(B, \tau, \gamma_i^0, \tau_3^0).$$

Ces six équations (9 *bis*) définiront les six éléments oscula teurs B, B_1, B_2, τ, τ_1, τ_2. Les B et les τ définis par les équa tions (9 *bis*) ne sont pas les mêmes que les B et les τ définis pa les équations (9), mais ils en diffèrent fort peu.

Remarquons que, les γ_i^0, n_2^0, ε_0 étant des constantes, les élément solaires variables n'interviennent pas dans la nouvelle définition

Que devient l'équation (5 *bis*)

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - (G - \Phi_1)\frac{d\tau_3}{n_2} + \sum \Gamma_i\,d\gamma_i \, ?$$

On doit y remplacer les γ_i, n_2 et τ_3 par γ_i^0, n_2^0 et τ_3^0; on a alors

$$d\gamma_i^0 = 0, \qquad \frac{d\tau_3^0}{n_2^0} = dt,$$

puisque les γ_i^0 et ε_0 sont des constantes, et il reste

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - (G_0 - \Phi_1^0)\,dt.$$

De plus, comme Φ_1 dépend des constantes solaires, il faut rem placer Φ_1 (qui est une fonction des x', des y'', de τ_3 et des γ_i) pa ce que devient cette fonction quand on y remplace γ_i et τ_3 par γ_i^0 et τ_3^0; je désigne par Φ_1^0 le résultat de cette substitution, d'où

$$W = \Phi_1^0 - G_0.$$

Nous aurons alors les équations

$$(7\ bis) \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{d\Phi_2}{d\tau}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dB},$$

en posant

$$\Phi_2 = \frac{F''}{m_1'} - W = \Phi_1 + \frac{U_6}{m_1'} - (\Phi_1^0 - G_0),$$

d'où

$$\Phi_2 = G_0 + R, \qquad R = \frac{U_6}{m_1'} + (\Phi_1 - \Phi_1^0).$$

Remarquons que G_0 ne dépend que des B. Nous retombons donc sur des équations de la forme (8) qui se traitent de la même façon.

M. Newcomb (*Investigation of inequalities in the motion of the Moon produced by the action of the planets*, Washington, Carnegie Institution, juin 1907) emploie un procédé mixte; il

emploie, en effet, le procédé du n° 379 pour les éléments d'orientation et celui du n° 380 pour les autres éléments.

381. En général, les termes provenant de l'action des planètes sont fort petits et ne deviennent sensibles que par l'effet des petits diviseurs si la période est très longue. Ils ne seront le plus souvent appréciables que dans le cas d'une double intégration, qui introduit au dénominateur le carré du petit diviseur. Nous aurons donc la partie la plus importante d'un terme à longue période en nous bornant à l'intégration des équations suivantes :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dG}{dB}.$$

Nous négligeons ainsi dans le second membre de la seconde équation le terme $-\frac{dR}{dB}$ qui ne subirait qu'une simple intégration. Si nous appelons δB, $\delta\gamma$, $\delta\tau$ les inégalités dues à un terme donné δR de la fonction perturbatrice, et si g est ce que devient G quand on y remplace les B et les γ par leurs valeurs initiales, nous pourrons encore écrire

$$(10) \qquad \frac{d\,\delta B}{dt} = \frac{d\,\delta R}{d\tau}, \qquad \frac{d\,\delta\tau_i}{dt} = -\sum \frac{d^2 G}{dB_i\,dB_k}\delta B_k - \sum \frac{d^2 G}{dB_i\,d\gamma_k}\delta\gamma_k.$$

382. Nous devons distinguer l'*action directe* et l'*action indirecte* d'une planète. Si l'action directe existait seule, tout se passerait comme si, le Soleil B et la planète P assujettis à décrire des orbites képlériennes, l'un autour de D, l'autre autour de G, la Terre et la Lune étaient soumises à l'attraction de ces deux astres mobiles; si l'action indirecte existait seule, tout se passerait comme si, la planète n'existant pas, le Soleil B était assujetti à décrire, par rapport à D, l'orbite troublée due à l'action de la planète.

Dans le cas des équations du n° 380, l'action directe provient du terme $\frac{U_6}{m'_1}$ et l'action indirecte du terme $\Phi_1 - \Phi_1^0$ [dans ce cas, dans les équations (10), on doit remplacer G par G_0 et les dérivées $\frac{d^2 G}{dB_i\,d\gamma_k}$ sont nulles, car G_0 ne dépend que des B].

Dans le cas du n° 379, on obtiendra l'action directe à l'aide des équations (8), en regardant les γ_i et $\frac{d\tau_3}{dt}$ comme des constantes

et en réduisant R au terme $\frac{U_6}{m'_1}$. On obtiendra l'action indirecte, en définissant les variations des γ_i et de $\frac{d\tau_3}{dt}$ par le moyen des équations (1) et en réduisant R aux termes

$$(G - \Phi_1)\varepsilon - \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt}.$$

Lorsque la planète troublante est très voisine du Soleil, l'action directe et l'action indirecte sont sensiblement égales et de signes contraires.

En effet, soit G_1 le centre de gravité de P et B. Dans le cas qui nous occupe, le point G_1 décrira une orbite sensiblement képlérienne autour de D, analogue à celle que décrirait le point B si la planète n'existait pas, mais dont le grand axe, pour un même moyen mouvement, se trouve multiplié par

$$\sqrt[3]{1 + \frac{m_{10}}{m_4}}.$$

Si à la limite nous négligeons la distance PB, tout se passe pour l'action directe comme si la masse du Soleil était augmentée de m_{10} et, en ce qui concerne l'action indirecte, comme si la distance BD était multipliée par

$$\sqrt[3]{1 + \frac{m_{10}}{m_4}};$$

il y a donc compensation en ce qui concerne les inégalités correspondantes (c'est-à-dire celles qui ne dépendent pas de l'angle PG_1D).

Il y a compensation aussi pour les inégalités proportionnelles à la distance PB (et qui contiennent cet angle PG_1D comme argument), car l'écart BG_1 multiplié par m_4 est égal à l'écart PG_1 multiplié par m_{10}. La compensation n'existe plus pour les inégalités proportionnelles aux puissances supérieures de PB, mais ces inégalités sont beaucoup plus faibles.

383. Nous devons distinguer deux sortes d'inégalités planétaires périodiques. Celles de la première sorte sont celles dont l'argument ne dépend que de τ_3 et de τ_4. Dans ce cas on a, en se reportant

aux équations (10),

$$\frac{d\,\delta R}{d\tau} = 0,$$

d'où

$$\delta B = 0, \qquad \frac{d\,\delta\tau_i}{dt} = -\sum \frac{d^2 G}{dB_i\,d\gamma_k}\,\delta\gamma_k.$$

Ces inégalités sont donc dues presque exclusivement à l'action indirecte (je veux dire que les termes provenant de l'action indirecte subissent seuls une double intégration), et l'action directe est négligeable surtout si la période est longue.

Les seuls γ_k dont dépend G sont E_3 et le grand axe solaire a'. Le terme en E_3 est de beaucoup le plus petit. On peut donc écrire

$$\frac{d\,\delta\tau_i}{dt} = -\frac{d^2 G}{dB_i\,da'}\,\delta a',$$

et comme on a d'autre part, λ étant la longitude solaire,

$$\frac{d\,\delta\lambda}{dt} = -\frac{3 n_2}{2 a'}\,\delta a',$$

on voit que les inégalités $\delta\tau$, $\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$ sont sensiblement proportionnelles entre elles et à l'inégalité solaire $\delta\lambda$. L'inégalité $\delta\tau$ engendre une inégalité à longue période de la longitude vraie de la Lune; les inégalités $\delta\tau_1$ et $\delta\tau_2$ engendrent des inégalités *concomitantes* à courte période de la longitude vraie. La principale de ces inégalités de la première sorte est engendrée par Vénus et a pour période $8\tau_4 - 13\tau_3$.

384. Les inégalités de la seconde sorte sont celles dont l'argument dépend de τ, τ_1 ou τ_2. Pour celles-là δB_k n'est plus nul. Au contraire, comme $\delta\gamma_k$ ne contient que des termes indépendants de τ, τ_1 ou τ_2, on devra faire $\delta\gamma_k = 0$, d'où

$$\frac{d\,\delta\tau_i}{dt} = -\sum \frac{d^2 G}{dB_i\,dB_k}\,\delta B_k.$$

Ces inégalités sont dues surtout à l'action directe. Pour les déterminer, nous écrirons U_8 *en négligeant la parallaxe* sous la forme

$$\frac{U_8}{m'_1\,m_{10}} = \frac{1 - 3\cos^2 PDA}{2\,PD^3}\,AC^2,$$

ou

$$\frac{U_6}{m'_1} = -\frac{m_{10}}{4\,\mathrm{PD}^5}(\mathcal{A}\mathcal{A}' + 3\mathcal{B}\mathcal{B}' + 12\,\mathcal{C}\mathcal{C}' + 12\,\mathcal{D}\mathcal{D}' + 12\,\mathcal{E}\mathcal{E}'),$$

où

$$\mathcal{A} = x'^2_1 + x'^2_2 - 2x'^3_2, \qquad \mathcal{B} = x'^2_1 - x'^2_2,$$
$$\mathcal{C} = x'_2 x'_3, \qquad \mathcal{D} = x'_1 x'_3, \qquad \mathcal{E} = x'_1 x'_2,$$

et où $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$ sont formés avec les trois projections du vecteur PD, c'est-à-dire avec

$$x'_{10} + \lambda x'_4, \quad x'_{11} + \lambda x'_5, \quad x'_{12} + \lambda x'_6,$$

où

$$\lambda = \frac{m_4}{m_4 + m_1 + m_7},$$

comme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ avec x'_1, x'_2, x'_3.

On voit que $\frac{\mathcal{A}'}{\mathrm{PD}^5}$, $\frac{\mathcal{B}'}{\mathrm{PD}^5}$, $\dots$ dépendent seulement de τ_3 et τ_4, tandis que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... ne contiennent que des arguments dépendant des coordonnées lunaires, à savoir (si l'on se borne aux termes elliptiques) des arguments de la forme

$$\begin{array}{rl} 2j\tau_2 + k\tau_1 & \text{pour } \mathcal{A}, \\ 2\tau + 2\tau_3 + 2j\tau_2 + k\tau_1 & \text{pour } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{E}, \\ \tau + \tau_3 + (2j-1)\tau_2 + k\tau_1 & \text{pour } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D}. \end{array}$$

Les principales inégalités de cette sorte sont celle de Hansen, due à l'action directe de Vénus, qui a pour argument

$$\tau_1 + 16\tau_3 - 18\tau_4 \quad \text{(période 239 ans)}$$

provenant du terme en τ_1 de $\mathcal{A}$ et du terme en $16\tau_3 - 18\tau_1$ de $\frac{\mathcal{A}'}{\mathrm{PD}^5}$, et celle de Neison, due à l'action directe de Jupiter, qui a pour argument $2\tau + 2\tau_3 - \tau_1 - 3\tau_4$ (période 37 ans), provenant du terme en $2\tau + 2\tau_3 - \tau_1$ de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$, et du terme en $3\tau_4$ de $\frac{\mathcal{B}'}{\mathrm{PD}^5}$ et $\frac{C'}{\mathrm{PD}^5}$.

Je me bornerai à renvoyer pour plus de détails au Mémoire cité plus haut de M. Newcomb, ainsi qu'au Mémoire de M. Radau dans le Tome XXI des ***Mémoires de l'Observatoire*** et au résumé qu'en a fait Tisserand dans le Tome III de sa ***Mécanique céleste.***

CHAPITRE XXXI.

ACCÉLÉRATIONS SÉCULAIRES.

385. Pour étudier les accélérations séculaires, nous devons d'abord nous reporter à ce que nous avons dit au Chapitre V, n° 105, au sujet de l'invariabilité des grands axes.

Soit plus généralement un système d'équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad F = F_0 + \mu R,$$

μ étant très petit. Je distinguerai deux sortes de variables x_i, que j'appellerai les x'_i et les x''_i; je désignerai de même par y'_i et y''_i les variables conjuguées des x'_i et des x''_i.

Je supposerai que F_0 dépend seulement des x' et est indépendant des x'', des y' et des y''; quant à R, il dépend des quatre sortes de variables, mais il est périodique par rapport aux y' et aux y''. Nous supposerons en outre que R dépend directement du temps; plus précisément, nous supposerons que R est périodique par rapport aux y', aux y'' et à un certain nombre d'arguments w qui sont des fonctions *linéaires connues* du temps.

En première approximation, on a

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF_0}{dy'} = 0, \qquad \frac{dx''}{dt} = \frac{dF_0}{dy''} = 0, \qquad \frac{dy''}{dt} = -\frac{dF_0}{dx''} = 0,$$

$$x' = \text{const.}, \qquad x'' = \text{const.}, \qquad y'' = \text{const.}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF_0}{dx'} = \text{const.}$$

Pour la seconde approximation, nous remplacerons dans les dérivées de R les variables par les valeurs approchées que nous venons de trouver et nous aurons

$$\frac{dx'}{dt} = \mu \frac{dR}{dy'},$$

et le second membre se présentera sous la forme d'une série trigonométrique.

En effet, R est une fonction périodique des y', des y'' et des w; les w sont des fonctions linéaires connues du temps, il en est de même des premières valeurs approchées des y'; quant à celles des y'', ce sont des constantes.

Si nous supposons qu'il n'y a entre les $\frac{dF_0}{dx'_i}$ et les $\frac{dw}{dt}$ (c'est-à-dire entre les moyens mouvements) aucune relation linéaire à coefficients entiers, les variations séculaires ne pourraient provenir que de ceux des termes de cette série trigonométrique qui sont indépendants à la fois des y' et des w. *Or tous ces termes disparaissent quand on différentie* R *par rapport à* y'_i. Donc il n'y a pas de termes séculaires dans les x'_i.

C'est là la généralisation du théorème sur l'invariabilité des grands axes.

Appliquons-le aux équations (8) du Chapitre précédent. G va jouer le rôle de F_0, R celui de μR, les B celui des x', les τ celui des y', et enfin τ_3 et τ_4 celui des w; nous n'aurons pas de variables analogues aux x'' et aux y'', tandis que dans les équations (5 *bis*) du n° 93, Chapitre IV, les L, les λ, les ρ et les ω jouaient respectivement le rôle des x', des y', des x'' et des y''; en première approximation on a

$$B = \text{const.}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dG}{dB} = \text{const.}$$

En deuxième approximation on a

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dR}{d\tau}.$$

Dans le second membre on remplace les B, les γ par leurs valeurs approchées qui sont des constantes, les τ, τ_3 et τ_4 par leurs valeurs approchées qui sont des fonctions linéaires du temps.

On obtient ainsi une série trigonométrique. Les termes de cette série qui sont indépendants à la fois des τ, de τ_3 et de τ_4, et d'où il pourrait résulter des variations séculaires, disparaîtront quand on différentiera par rapport à τ, à τ_1 ou à τ_2; donc *les quantités* B, B_1, B_2 *n'éprouvent aucune variation séculaire*.

386. Le numéro précédent nous apprend que les variations

séculaires des B,

$$\delta B, \quad \delta B_1, \quad \delta B_2,$$

sont nulles. C'est sur cette circonstance que s'appuie Brown pour déterminer les accélérations séculaires

$$\delta\nu, \quad \delta\nu_1, \quad \delta\nu_2$$

des divers moyens mouvements. Pour cela rappelons la formule du n° 363 :

$$dH = B\,d\nu + B_1\,d\nu_1 + B_2\,d\nu_2.$$

Si nous regardons les B, H, ν_1 et ν_2 comme des fonctions de

$$\nu = \frac{n_2}{m},$$

de E_1 et de E_2, il viendra

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dH}{d\nu} = B + B_1 \dfrac{d\nu_1}{d\nu} + B_2 \dfrac{d\nu_2}{d\nu}, \\[2ex] \dfrac{dH}{dE_1} = \qquad B_1 \dfrac{d\nu_1}{dE_1} + B_2 \dfrac{d\nu_2}{dE_1}, \\[2ex] \dfrac{dH}{dE_2} = \qquad B_1 \dfrac{d\nu_1}{dE_2} + B_2 \dfrac{d\nu_2}{dE_2}. \end{cases}$$

Si nous négligeons E_1^2 et E_2^2 et par conséquent B_1 et B_2 qui sont respectivement divisibles par E_1^2 et E_2^2, il restera

$$\frac{dH}{d\nu} = B,$$

et par conséquent

$$\delta \frac{dH}{d\nu} = 0.$$

Les B, H et les ν sont fonctions non seulement des trois constantes lunaires ν, E_1 et E_2, mais encore de deux des constantes solaires, à savoir le demi-grand axe a' et l'excentricité E_3. En vertu du théorème d'Adams, H ne contient pas de termes en E_1^2 et E_2^2, de sorte qu'en négligeant les puissances supérieures de ces quantités on aura

$$\frac{dH}{dE_1} = \frac{dH}{dE_2} = \frac{d^2H}{d\nu\,dE_1} = \frac{d^2H}{d\nu\,dE_2} = 0,$$

et qu'il reste

$$(3) \qquad \delta \frac{dH}{d\nu} = \frac{d^2H}{d\nu^2}\,\delta\nu + \frac{d^2H}{d\nu\,dE_3}\,\delta E_3 = 0.$$

Comme δE_3 est connu par la théorie des planètes, cette équation donnera $\delta\nu$. Nous trouverons ensuite

$$(4) \qquad \delta\nu_i = \frac{d\nu_i}{d\nu}\delta\nu + \frac{d\nu_i}{dE_3}\delta E_3.$$

Nous devons remarquer, en effet, qu'à ce degré d'approximation on a

$$E_1\,\delta E_1 = E_2\,\delta E_2 = 0,$$

et, comme B_1 étant divisible par E_1^2 nous pouvons écrire $B_1 = C_1 E_1^2$, il vient

$$(5) \qquad \delta B_1 = E_1^2\,\delta C_1 + C_1\,\delta(E_1^2) = 0,$$

d'où, puisque nous négligeons E_1^2,

$$\delta(E_1^2) = 0,$$

et de même $\delta(E_2^2) = 0$.

Les équations (3) et (4) déterminent les accélérations séculaires $\delta\nu$, $\delta\nu_1$, $\delta\nu_2$. Mais pour cela il faut se servir des expressions de ν_1 et de ν_2 en fonctions de ν et de E_3^2, ou, ce qui revient au même, de celles de c et de g en fonctions de m et de E_3^2. Il faut, d'autre part, connaître l'expression de H en fonction de ν et de E_3.

Il nous suffit de rappeler qu'en vertu du théorème d'Adams, quand on néglige la parallaxe, H n'est autre chose, à un facteur constant près, que le terme constant du développement trigonométrique de $\frac{1}{r}$.

387. Avant de pousser plus loin l'approximation en tenant compte de E_1^2 et E_2^2, commençons par remarquer que nous avons

$$(6) \qquad \frac{d\nu_i}{d\nu} = \frac{d^2\nu_i}{d\nu^2}\delta\nu + \frac{d^2\nu_i}{d\nu\,dE_3}\delta E_3,$$

d'où il résulte que les équations (3), (4) et (6) nous donnent en première approximation

$$\nu, \quad \delta\nu_i, \quad \delta\frac{d\nu_i}{d\nu}.$$

Cela va nous permettre de passer à la deuxième approximation.

Reprenons les notations du n° 371 et écrivons

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + a\, E_1^4 + 2b E_1^2 E_2^2 + c E_2^4 = H_0 + H_4,\\
\nu_1 &= \lambda_1 + \mu_1 E_1^2 + \mu'_1 E_2^2,\\
\nu_2 &= \lambda_2 + \mu_2 E_1^2 + \mu'_2 E_2^2,\\
B_1 &= \beta E_1^2, \qquad B_2 = \gamma E_2^2.
\end{aligned}$$

Dans la première approximation, nous avons réduit H, ν_1 et ν_2 à leurs premiers termes, H_0, λ_1 et λ_2.

Passons à la deuxième approximation. Comme $\delta(E_1^2)$ et $\delta(E_2^2)$ sont de l'ordre de E_1^2 et E_2^2, nous voyons que

$$\delta H_4, \quad \delta \frac{dH_4}{d\nu},$$

qui sont des polynomes du deuxième degré en E_1^2, E_2^2, $\delta(E_1^2)$, $\delta(E_2^2)$, sont de l'ordre de E_1^4 ou E_2^4 et par suite négligeables, de sorte qu'on a

$$\delta \frac{dH}{d\nu} = \delta \frac{dH_0}{d\nu} = \frac{d^2 H_0}{d\nu^2}\delta\nu + \frac{d^2 H_0}{d\nu\, dE_3}\delta E_3.$$

D'autre part,

$$\frac{dH}{d\nu} = B + B_1 \frac{d\nu_1}{d\nu} + B_2 \frac{d\nu_2}{d\nu},$$

d'où, en nous rappelant que les δB sont nuls,

$$\frac{d^2 H_0}{d\nu^2}\delta\nu + \frac{d^2 H_0}{d\nu\, dE_3}\delta E_3 = \beta E_1^2\, \delta \frac{d\nu_1}{d\nu} + \gamma E_2^2\, \delta \frac{d\nu_2}{d\nu}. \tag{7}$$

Comme dans tous les termes du second membre figure en facteur E_1^2 ou E_2^2, nous pourrons dans ce second membre remplacer $\delta \frac{d\nu_1}{d\nu}$ et $\delta \frac{d\nu_2}{d\nu}$ par leurs premières valeurs approchées, de sorte que l'équation (7) nous donnera la nouvelle valeur de $\delta\nu$.

388. Nous avons ensuite, pour les $\delta\nu_i$,

$$\delta\nu_i = \frac{d\nu_i}{d\nu}\delta\nu + \frac{d\nu_i}{dE_3}\delta E_3 + \mu_i\, \delta(E_1^2) + \mu'_i\, \delta(E_2^2). \tag{8}$$

Il faudra cette fois, dans le calcul de $\frac{d\nu_i}{d\nu}$, $\frac{d\nu_i}{dE_3}$, tenir compte des termes $\mu_i E_1^2 + \mu'_i E_2^2$.

Pour calculer $\delta(E_1^2)$, nous nous servirons de l'équation (5) et nous y ferons

$$C_1 = \beta, \qquad \delta C_1 = \delta\beta = \frac{d\beta}{d\nu}\delta\nu + \frac{d\beta}{dE_3}\delta E_3.$$

Nous pourrons d'ailleurs, dans cette formule, remplacer $\delta\nu$ par sa première valeur approchée. On calculerait $\delta(E_2^2)$ de la même manière.

On peut considérer les développements des ν_i comme connus, et par conséquent aussi ceux des λ_i, μ_i, μ'_i. On connaît également celui de $\frac{1}{r}$, et par conséquent celui de H et ceux de H_0, a, b, c.

Quant à β et à γ, ils nous sont donnés par le théorème d'Adams du n° 371, d'où

$$\beta = \frac{2a}{\mu_1} = \frac{2b}{\mu'_1}, \qquad \gamma = \frac{2b}{\mu_2} = \frac{2c}{\mu'_2}.$$

On remarquera que, dans toute cette analyse, les éléments d'orientation ne jouent aucun rôle, d'où il suit immédiatement que les déplacements séculaires de l'écliptique ne peuvent exercer aucune influence sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune, ce qui confirme les résultats obtenus autrefois par M. Puiseux.

Il resterait à parler de ce qui concerne les inégalités dues à l'aplatissement terrestre ; en l'absence de nouveaux travaux sur ce sujet, je me bornerai à renvoyer le lecteur au Tome III de la *Mécanique céleste* de Tisserand, pages 144 et suivantes.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE DU TOME II.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE DU TOME II.

la possibilité de cette explication est certaine, et l'on n'est arrêté que par la difficulté de choisir entre toutes les solutions que le problème comporte.

Mais comment nous assurons-nous de la conformité des lois de l'Electrostatique et de l'Electrodynamique avec les principes de la Dynamique? C'est par une série de comparaisons; quand nous voudrons analyser un phénomène électrique, nous prendrons un ou deux phénomènes mécaniques bien connus et nous chercherons à mettre en évidence leur parfait parallélisme. Ce parallélisme nous sera ainsi un garant suffisant de la possibilité d'une explication mécanique.

L'emploi de l'Analyse mathématique ne servirait qu'à montrer que ces comparaisons ne sont pas seulement de grossiers rapprochements, mais qu'elles se poursuivent jusque dans les détails les plus précis. Les limites de cet Ouvrage ne me permettront pas d'aller aussi loin, et je devrai me borner à une comparaison pour ainsi dire qualitative.

Table des Matières.